

ANÁLISE COMBINATÓRIA

By Luiz Renato Gomes

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade apresentar um resumo contendo os principais temas e aplicações da parte da matemática conhecida por análise combinatória.

No desenvolvimento do trabalho serão apresentadas as principais divisões da análise combinatória, suas particularidades, a conceituação teórica bem como alguns exemplos práticos procurando dar uma idéia da aplicação desta ferramenta que é de suma importância no campo científico tanto das ciências exatas, como no campo das ciências humanas.

1. Introdução

Análise combinatória é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos, que satisfaçam certos critérios específicos, e se preocupa, em particular, com a "contagem" de objetos nessas coleções (combinatória enumerativa) e com a decisão se certo objeto "ótimo" existe (combinatória extrema) e com estruturas "algébricas" que esses objetos possam ter (combinatória algébrica). O assunto ganhou notoriedade após a publicação de "Análise Combinatória" por Percy Alexander MacMahon em 1915. Um dos destacados combinatorialistas dos últimos tempos foi Gian-Carlo Rota que ajudou a formalizar o assunto a partir da década de 1960. Outro estudioso do assunto foi o engenhoso Paul Erdos que trabalhou principalmente em problemas extremos.

A análise combinatória é a parte da matemática que se ocupa da formação, do cálculo e das propriedades dos agrupamentos de elementos que podem ser genéricos ou particulares.

Se tomarmos uma coleção qualquer de objetos quaisquer, vamos observar que existem diversas maneiras de se agrupar essa coleção de objetos. Estabelecemos então a denominação de agrupamentos para os grupos formados e de elementos para os objetos que os [agrupamentos] constituem.

Um dos campos de maior aplicação da teoria da análise combinatória é exatamente o campo da informática cujo conceito de endereçamento e ordenação forma os verdadeiros pilares dessa matéria. A teoria da lógica associada à teoria da análise combinatória encontrou um caminho perfeito com o advento dos primeiros computadores. A aplicação dentro da área de Engenharia tornou-se quase que um corolário. A extensão para as demais ciências acabou sendo uma consequência em função, não só da tecnologia exigida, como também da necessidade de elaboração de modelos cada vez mais precisos.

Quando procuramos encontrar o que há de comum em um determinado agrupamento de diferentes elementos, nada mais estamos fazendo senão aplicar um dos primeiros princípios da análise combinatória que é justamente a ordenação.

O processo de ordenação, que basicamente representa uma forma aleatória de escolha, acaba evoluindo para o conceito de indução finita que muitas vezes leva a definição de leis de encadeamento e de combinação de elementos de determinado agrupamento criando uma forma de raciocínio também conhecido como raciocínio indutivo. Ciências humanas como a Filosofia e a Sociologia se utilizaram muito desse conceito que tem suas bases na análise combinatória.

O grande físico inglês Sir Isaac Newton foi um dos primeiros a explorar, através do desenvolvimento metodológico, os conceitos da análise combinatória que ele próprio ajudou a desenvolver. Tanto Newton quanto o físico alemão Gottfried Leibniz foram os grandes gênios precursores dessa ciência. Muito além de simples físicos e matemáticos eles foram filósofos de

uma nova ordem de pensamento que mudou por completo a idéia que se tinha, até então, sobre a vida do homem na Terra.

2. Tipos de Agrupamentos

A teoria da matemática moderna introduziu o conceito de conjunto, *set*, em inglês. Esta definição foi de suma importância porque garantiu que determinado agrupamento de objetos pudesse ser delimitado segundo uma determinada lei de formação que todos aqueles objetos deveriam obedecer. O simples estabelecimento dessa conceituação permitiu que a idéia de um simples agrupamento evoluísse para a idéia de conjunto que é a base da estrutura da matemática moderna. Mesmo assim, a conceituação de agrupamento é importantíssima a partir da análise combinatória.

Os agrupamentos de objetos, ou de elementos, basicamente, podem ser divididos em dois grandes grupos: agrupamentos simples e agrupamentos com repetição.

2.1. Agrupamentos Simples ou Distintos: São agrupamentos de elementos que são distintos entre si, isto é, não existe elemento repetido.

Exemplo 1:

a, b, c, d, e

2.2. Agrupamentos com Repetição: São agrupamentos onde pelo menos um dos elementos constituinte pode aparecer mais de uma vez.

Exemplo 2:

a, a, a, b, b, c, d, e

Dois agrupamentos simples podem diferir entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de seus elementos.

Pela ordem é simplesmente uma questão de posicionamento, e pela natureza quando, entre um e outro agrupamento, houver formas diferentes em termos de função, de qualificação e de atributos.

Exemplo 3:

Seja avaliar os agrupamentos **A**, **B**, **C**, e **D** seguintes.

O agrupamento **A** = {a, b, c, d, e, f} difere do agrupamento **B** = {b, e, f, a, d, c} apenas pela ordem.

O agrupamento **C** = {α, β, γ, δ, θ, ρ} difere do agrupamento **D** = {a, b, g, d, q, r} pela natureza uma vez que o agrupamento **C** é formado por letras do alfabeto grego, enquanto que o agrupamento **D** é formado por letras do nosso alfabeto.

Além da questão da diferença entre agrupamentos, os agrupamentos podem ter seus elementos tomados de diferentes maneiras tanto na ordem de colocação quanto na quantidade. Seja considerar apenas o agrupamento **E** de cinco letras maiúsculas de nosso alfabeto.

Assim temos o agrupamento **E** = {V, X, W, Y, Z}.

Podemos formar, por exemplo, os seguintes agrupamentos de três elementos cada, tomados do agrupamento original **E**.

F = {V, X, W}
G = {X, W, Y}
H = {W, Y, Z}
G = {Z, Y, V}

2.3. Acontecimento

Podemos definir acontecimento como sendo aquilo que acontece, aquilo que tem lugar num determinado momento: um evento, um fato que tem início e fim bem definidos.

Quando definimos determinado acontecimento ele passa a admitir a possibilidade de ser manipulado, classificado e ordenado. Isto toma grande importância quando sabemos que qualquer análise, basicamente, deverá levar em consideração o histórico de acontecimentos o que de um modo ou de outro exigirá a determinação desses acontecimentos.

Uma necessidade bem simples, quando trabalhamos com acontecimentos, seria saber de quantas maneiras possíveis um determinado acontecimento poderia ocorrer. Surge aqui a primeira regra da análise combinatória, se assim podemos dizer.

Regra da Multiplicação

A regra da multiplicação diz respeito à forma de calcularmos todas as possibilidades de existência de acontecimentos que dependem entre si. Se um acontecimento pode ser feito de “p” maneiras diferentes e é seguido de outro acontecimento que, do mesmo modo, pode surgir de “q” maneiras também diferentes, então o número total “N” de maneiras segundo as quais ocorrerão os acontecimentos em sucessão será dado pela fórmula 001 seguinte:

$$N = p \times q \quad 001$$

Exemplo 4:

Existem 3 estradas ligando as cidades **A** e **B** e há 5 vias ligando as cidades **B** e **C**. De quantas maneiras possíveis se pode ir da cidade **A** até a cidade **C** passando pela cidade **B**?

Solução:

Notamos que os acontecimentos são dependentes.

Considerando-se a fórmula 001, para $p = 3$ e $q = 5$ $N = 3 \times 5 = 15$

Resposta: 15 maneiras possíveis.

Regra da Adição

A regra da multiplicação diz respeito à forma de calcularmos todas as possibilidades de existência de acontecimentos que são dependentes entre si. Se um acontecimento pode ser feito de “p” maneiras diferentes e independentes de outro acontecimento que, do mesmo modo, pode surgir de “q” maneiras também diferentes, então o número total “N” de maneiras segundo as quais ocorrerão os acontecimentos será dado pela fórmula 002 seguinte:

$$N = p + q \quad 002$$

Exemplo 5:

Existem 3 estradas ligando as cidades **A** e **B** e há 5 vias também ligando essas cidades. De quantas maneiras possíveis se pode ir da cidade **A** até a cidade **B**?

Solução:

Notamos que os acontecimentos são independentes.

Considerando-se a fórmula 002, para $p = 3$ e $q = 5$ $N = 3 + 5 = 8$

Resposta: 8 maneiras possíveis.

Os agrupamentos também podem ser divididos segundo o ponto de vista elementar e aí eles podem caracterizar uma permutação, um arranjo ou uma combinação de elementos.

Pela característica intrínseca e pela importância que cada uma dessas classificações toma, tanto na matemática quanto na própria vida, elas serão analisadas em tópicos específicos.

3. Permutações

As permutações são um tipo de classificação de agrupamentos de elementos em que todo o conjunto é tomado no processo.

Elas podem ser permutação simples, permutação com elementos repetidos ou permutação circular.

3.1. Permutações Simples

Permutações simples são todos os agrupamentos de “m” elementos distintos em que entram “m” elementos de uma vez, diferindo os grupos entre si pela ordem de colocação dos elementos.

Exemplo 6:

Permutemos os elementos A, B e C.

Solução:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

A notação adotada para indicar a operação de permutação simples é P_m indicando que se trata da permutação de “m” elementos.

De maneira prática podemos adotar o seguinte raciocínio para compor as diferentes operações de permutação simples.

Seja o agrupamento de 1 elemento, $m = 1$ e $P_m = 1$.

Seja o agrupamento de 2 elementos A e B, $m = 2$ e deveremos desenvolver essa permutação.

Solução: AB, BA

Portanto, com 2 elementos são possíveis 2 permutações. Logo com $m = 2$ temos $P_m = 2$.

Seja o agrupamento de 3 elementos A, B e C, $m = 3$ e deveremos desenvolver essa permutação.

Solução: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Portanto, com 3 elementos são possíveis 6 permutações. Logo com $m = 3$ temos $P_m = 6$

Seja o agrupamento de 4 elementos A, B, C e D, $m = 4$ e deveremos desenvolver essa permutação.

Solução: ABCD, ABDC, ACDB, ACBD, ADBC, ADCB,
 BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
 CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
 DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA,

Portanto, com 4 elementos são possíveis 24 permutações. Logo com $m = 4$ temos $P_m = 24$

Notamos que a formação das " P_m " consiste em colocar à direita dos " m " elementos as permutações dos " $m-1$ " elementos.

Assim podemos criar uma fórmula de recorrência segundo o seguinte procedimento:

Para $m = 1 \rightarrow P_1 = 1$

Para $m = 2 \rightarrow P_2 = 1 \times 2 = 2$

Para $m = 3 \rightarrow P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Para $m = 4 \rightarrow P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

.

.

.

Para $m \rightarrow P_m = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots (m-1) \times m = m!$

Logo:

$$P_m = m! = 1.2.3.4...m$$

003

$m!$ → Essa notação é conhecida como fatorial de um número " m " e é igual ao produto dos " m " primeiros números consecutivos.

Uma particularidade:

Quando $m = 0$ temos que $0! = 1$.

Exemplo 7:

De quantas maneiras diferentes 8 pessoas podem se sentar num banco de 8 lugares?

Solução:

Temos 8 pessoas e um banco de 8 lugares. Os elementos estão sendo tomados no seu total, logo temos o caso de uma permutação $P_8 = 8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40.320$.

Assim existirão 40.320 maneiras de os 8 lugares do banco serem preenchidos pelas 8 pessoas.

Análise do Problema:

Lugares

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

1º. Lugar pode ser preenchido de 8 maneiras.

2º. Lugar pode ser preenchido de 7 maneiras.

3º. Lugar pode ser preenchido de 6 maneiras.

- 4°. Lugar pode ser preenchido de 5 maneiras.
- 5°. Lugar pode ser preenchido de 4 maneiras.
- 6°. Lugar pode ser preenchido de 3 maneiras.
- 7°. Lugar pode ser preenchido de 2 maneiras.
- 8°. Lugar pode ser preenchido de 1 maneira.

Como os acontecimentos são sucessivos [dependentes] a regra é a multiplicação o que nos dá como resultado o fatorial do número 8, ou 8!

Exemplo 8:

Possuo 6 livros de matemática, 5 de português e 3 de inglês. De quantas maneiras eu posso agrupá-los numa estante se quero que os mesmos livros de uma matéria fiquem sempre juntos?

Solução:

Deveremos permutar primeiro os livros de uma mesma matéria e logo depois permutar os pacotes das matérias. Assim concluímos que os acontecimentos são dependentes.

Permutando os livros de matemática vem: $P_6 = 6! = 720$.

Permutando os livros de português vem: $P_5 = 5! = 120$.

Permutando os livros de inglês vem: $P_3 = 3! = 6$.

Finalmente, permutando os 3 pacotes para que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos vem: $P_3 = 3! = 6$.

Como são acontecimentos dependentes, a regra que vale é a da multiplicação, logo o resultado geral será: $P_6 \times P_5 \times P_3 \times P_3 = 720 \times 120 \times 6 \times 6 = 3.110.400$ número de maneiras diferentes.

3.2. Permutação com Elementos Repetidos

Permutação com elementos repetidos de “m” elementos, sendo “ α ” elementos iguais a A, “ β ” elementos iguais a B e “ λ ” elementos iguais a C, são os diversos agrupamentos distintos que podemos formar com esses “m” elementos.

Logo:

$$m = \alpha + \beta + \lambda$$

A notação adotada para indicar a operação de permutação com elementos repetidos é PR_m indicando que se trata da permutação com repetição de “m” elementos.

De maneira prática podemos adotar o seguinte raciocínio para compor as diferentes operações de permutação com elementos repetidos.

Vamos supor

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 3$$

$$\lambda = 2$$

para o seguinte agrupamento: A A A B B B C C

Se os elementos não fossem repetidos, o número de permutações seria de $P_8 = 8!$

Se permutarmos o grupo AAA teremos o número $P_3 = 3!$

Do mesmo modo para o grupo BBB teremos o número $P_3 = 3!$

Finalmente para o grupo CC teremos o número $P_2 = 2!$

Como essas permutações são dependentes e, sendo repetidas, deverão ser descontadas do total que considerou a condição em que não houvesse repetição de elementos. Assim o número total deverá ser dividido pelas parcelas $P3$, $P3$ e $P2$, pois se trata do inverso da regra da multiplicação. Logo a permutação com $m = 8$ elementos, contendo 3 grupos com 3, 3 e 2 elementos repetidos, será:

$$PR_m = \frac{m!}{\alpha! \beta! \lambda!} = \frac{8!}{3! 3! 2!}$$

De uma maneira bem genérica, considerando os mesmos “m” elementos, porém com grupos repetidos de α , β , λ , ... , ω elementos, a fórmula geral para calcularmos o número de permutações com esses elementos repetidos será:

$$PR_m = \frac{m!}{\alpha! \beta! \lambda! \dots \omega!} \quad 004$$

Exemplo 9:

Calcular o número de permutações distintas [anagramas] que podemos formar com as letras da palavra “ASSASSINAS”.

Solução:

Primeiramente notamos que se trata de permutação e com elementos repetidos.

Considerando a aplicação direta da equação 004 anterior, temos:

$$m = 10$$

$$\alpha = 3 \text{ para a letra A}$$

$$\beta = 5 \text{ para a letra S}$$

$$\lambda = 1 \text{ para a letra I}$$

$$\omega = 1 \text{ para a letra N}$$

Logo:

$$PR_{10} = \frac{10!}{3! 5! 1! 1!} = \frac{3.628.800}{6 \times 120} = 5.040$$

3.3. Permutações Circulares

As permutações que foram vistas até então são ditas retílineas porque podemos imaginar os elementos do agrupamento dispostos sobre uma reta. Às vezes precisamos considerar as permutações cujos elementos estão dispostos segundo uma circunferência. Tais permutações são denominadas de permutações circulares. O número destas permutações de “m” elementos contados em um só sentido é dado pela fórmula da equação 005.

$$PC_m = \frac{m!}{m} \quad 005$$

É interessante notar que se $m! = m (m-1) (m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m (m-1)!$ a fórmula 005 também poderá ser escrita da seguinte forma:

$$PC_m = \frac{m(m-1)!}{m} = (m-1)!$$

Ou, repetindo:

$$PC_m = (m-1)! \quad 006$$

Pela equação 005, percebemos que em toda permutação circular sempre haverá, considerando-se um determinado sentido de rotação, um número repetido de permutação que é igual ao número de elementos. A questão é que se encaramos uma permutação circular como retilínea, quando houver a emenda do final para compor o círculo, haverá uma coincidência, pois esse elemento voltará à primeira condição repetindo o grupo. Assim para cada um dos elementos haverá essa coincidência que deverá ser descontada.

Vamos explicar isso por exemplos.

Imaginemos uma permutação circular de 4 elementos distintos e suas permutações possíveis.

$$\boxed{4} 3 2 1 \quad \boxed{3} 1 2 4 \quad \boxed{2} 1 3 4 \quad \boxed{1} 2 3 4$$

Considerando uma permutação retilínea sabemos que o número total de permutações é dado por $P4 = 4!$

Se considerarmos a disposição anteriormente desenhada, podemos encarar a situação como sendo eventos independentes fixando um dos elementos de cada vez e permutando o restante. Assim a nova forma de calcular o número total de permutações ficaria:

$$P3 + P3 + P3 + P3 = 4 \cdot P3 = 4 \cdot 3! = 4!$$

Como na permutação circular deveremos descontar as permutações referentes a cada um dos elementos já que no fechamento das pontas, para a composição final, há repetição do grupo, deveremos descartá-las do total.

De um modo genérico podemos escrever:

$$m = 1 \rightarrow P1$$

$$m = 2 \rightarrow P1 + P1 = 2 \cdot P1 = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$m = 3 \rightarrow P2 + P2 + P2 = 3 \cdot P2 = 3 \cdot 2! = 3!$$

$$m = 4 \rightarrow P3 + P3 + P3 + P3 = 4 \cdot P3 = 4 \cdot 3! = 4!$$

.

.

.

$$m \rightarrow P(m-1) + P(m-1) + P(m-1) + \dots + P(m-1) = m \cdot P(m-1) = m \cdot (m-1)! = m!$$

Descartando essa última permutação do total de permutações com grupos distintos de uma permutação circular, tomando como referência a permutação retilínea, será o total de permutações dos elementos como se tivéssemos uma permutação linear descontado o número das últimas permutações para cada elemento, o que dará como resultado a equação anterior 006.

Exemplo 10:

De quantas maneiras 7 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa redonda?

Solução:

Primeiramente notamos que se trata de permutação circular com elementos distintos.

Pela aplicação direta da fórmula da equação 006 com:

$$m = 7$$

$$PC7 = (7-1)! = 6! = 720 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 11:

De quantas maneiras 7 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa redonda sendo que 2 determinadas pessoas deverão sempre ficar juntas?

Solução:

Também notamos aqui que se trata de permutação circular com elementos distintos, porém com um grupo de 2 pessoas que será tratado como um único grupo, pois elas estarão sempre juntas.

Pela aplicação direta da fórmula da equação 006 com:

$$m = 6$$

$$PC7 = (6-1)! = 5! = 120 \text{ maneiras.}$$

Agora, permutando as 2 pessoas teremos $P2 = 2! = 2$.

Como se trata de eventos dependentes o total de permutações solução do problema será $2 \times 120 = 240$ maneiras.

4. Arranjos

Arranjos de “m” elementos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$, são os agrupamentos que podemos formar com os “m” elementos de modo que em cada agrupamento entrem os “p” elementos, diferindo um agrupamento do outro pela ordem de colocação e pela natureza dos elementos.

4.1. Arranjos Simples

São os arranjos de “m” elementos distintos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$.

Imaginemos um agrupamento formado pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto: { A B C D E }.

Formemos agora novos arranjos simples de 3 letras cada conforme seguinte:

A B C

A B D

A B E

A C B

A C D

A C E

A D B ... etc.

A notação adotada para indicar a operação de arranjo simples é $A_{m,p}$ ou A_m^p = indicando que se trata de arranjo de “m” elementos tomados “p” a “p” elementos.

Para a obtenção da fórmula recursiva para o cálculo do número de arranjos simples vamos considerar a seguinte formação. Consideremos os seguintes elementos formados pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto: { A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L }.

Tomando os elementos segundo a quantidade de elementos vem:

$$p = 1$$

$$\{ A_m^p \} = A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$$

$$p = 2$$

$$\{ A_m^p \} = AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL$$

$$BA, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ, BK, BL$$

$$CA, CB, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ, CK, CL$$

$$DA, DB, DC, DE, DF, DG, DH, DI, DJ, DK, DL$$

$$EA, EB, EC, ED, EF, EG, EH, EI, EJ, EK, EL$$

$$FA, FB, FC, FD, FE, FG, FH, FI, FJ, FK, FL$$

$$GA, GB, GC, GD, GE, GF, GH, GI, GJ, GK, GL$$

$$HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HI, HJ, HK, HL$$

$$IA, IB, IC, ID, IE, IF, IG, IH, IJ, IK, IL$$

$$JA, JB, JC, JD, JE, JF, JG, JH, JI, JK, JL$$

$$KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KI, KJ, KL$$

$$LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG, LH, LI, LJ, LK$$

$$p = 3$$

$$\{ A_m^p \} = ABC, ABD, ABE, ABF, \dots, ABL$$

$$ACB, ACD, ACE, ACF, \dots, ACL$$

$$ADB, ADC, ADE, ADF, \dots, ADL$$

$$AEB, AEC, AED, AEF, \dots, AEL$$

$$\dots\dots\dots$$

$$AKB, AKC, AKD, AKE, \dots, AKL$$

$$ALB, ALC, ALD, ALE, \dots, ALK$$

$$BAC, BAD, BAE, BAF, \dots, BAL$$

$$\dots\dots\dots$$

$$LAB, LAC, LAD, LAE, \dots, LAK$$

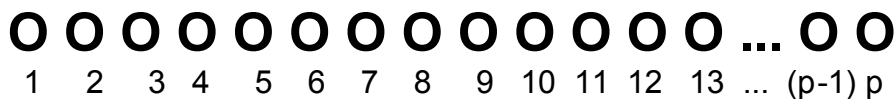
$$\dots\dots\dots$$

$$LKA, LKB, LKC, LKD, \dots, LKJ$$

Portanto a formação dos A_m^p consiste em colocar, ao lado de cada elemento, os arranjos simples $A_{(m-1)}^{(p-1)}$ que podemos formar com os $(m-1)$ elementos restantes.

Para a obtenção da fórmula recursiva do cálculo do número de arranjos simples dado por A_m^p será necessário desenvolver um certo raciocínio.

Sejam “m” elementos tomados “p” a “p”.



O **primeiro** lugar pode ser preenchido de “**m**” maneiras.

O **segundo** lugar pode ser preenchido de **(m-1)** maneiras.

O **terceiro** lugar pode ser preenchido de **(m-2)** maneiras.

O **quarto** lugar pode ser preenchido de **(m-3)** maneiras.

.

.

.

O “**P**” **ésimo** lugar pode ser preenchido de **[m - (p-1)]** maneiras.

Como se trata de acontecimentos sucessivos, dependentes, a regra utilizada será a da multiplicação. Assim:

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots[m-(p-1)] \quad 007$$

Agora vamos multiplicar e dividir a expressão da equação 007 por $(m-p)!$ o que não altera o resultado.

$$A_m^p = \frac{[m(m-1)(m-2)(m-3)\dots[m-(p-1)](m-p)!}{(m-p)!}$$

$$A_m^p = \frac{[m(m-1)(m-2)(m-3)\dots[m-(p-1)](m-p)[m-(p+1)]\dots 3.2.1}{(m-p)!} = \frac{m!}{(m-p)!}$$

Finalmente a fórmula recursiva para calcular o número de arranjos simples de “m” elementos tomados “p” a “p” :

$$A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!} \quad 008$$

Uma particularidade:

Quando se toma os “m” elementos do agrupamento “m” a “m” o arranjo simples se converte em uma permutação senão vejamos.

$$A_m^p = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{(0)!} = \frac{m!}{1} = m! = P_m$$

Portanto a permutação é um caso particular de arranjo.

Exemplo 13:

Calcular o número de arranjos de 5 livros distintos tomados 3 a 3.

Solução:

Pela aplicação direta da fórmula da equação 008 com $m = 5$ e $p = 3$ vem:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Logo o número de arranjos é 60.

Exemplo 14:

Quantos números de 4 algarismos distintos nós podemos formar com os algarismos: 1, 3, 5, 6, 7 e 8?

Solução:

Pela aplicação direta da fórmula da equação 008 com $m = 6$ e $p = 4$ vem:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Logo o número de 4 algarismos com os algarismos dados é 360.

Exemplo 16:

Quantos números pares de 4 algarismos distintos nós podemos formar com os algarismos naturais?

Solução:

Os algarismos naturais são: {0 1 2 3 4 5 6 7 8 9}.

O problema trata-se de um arranjo simples.

Considerando a fórmula da equação 008 temos $m = 9$ e $p = 3$.

O problema, porém, não pode ser solucionado pela aplicação direta da fórmula da equação 008 porque queremos apenas os números pares de 3 algarismos e também não são considerados números de 3 algarismos aqueles começados por "0"..

Temos:

Números pares: 0 2 4 6 8

Números ímpares: 1 3 5 7 9

$$\text{Fixando o algarismo "0" teremos } \rightarrow m = 9 \text{ e } p = 3 \rightarrow A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

$$\text{Fixando o algarismo "2" teremos } \rightarrow m = 9 \text{ e } p = 3 \rightarrow A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

$$\text{Fixando o algarismo "4" teremos } \rightarrow m = 9 \text{ e } p = 3 \rightarrow A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Fixando o algarismo “6” teremos $\rightarrow m = 9$ e $p = 3 \rightarrow A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9.8.7.6!}{6!} = 9.8.7 = 504$

Fixando o algarismo “8” teremos $\rightarrow m = 9$ e $p = 3 \rightarrow A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9.8.7.6!}{6!} = 9.8.7 = 504$

Como os acontecimentos são independentes a regra a ser aplicada é a regra da adição.

Logo teremos $5 \times 504 = 2520$ números.

Vamos providenciar a eliminação dos números que tem o “0” no início, fixando exatamente o número “0” junto com cada um dos outros 2, 4, 6 e 8.

Assim vem o seguinte arranjo pela aplicação direta da fórmula da equação 008.

Fixando o algarismo “2” teremos $\rightarrow m = 8$ e $p = 2 \rightarrow A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

Fixando o algarismo “4” teremos $\rightarrow m = 8$ e $p = 2 \rightarrow A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

Fixando o algarismo “6” teremos $\rightarrow m = 8$ e $p = 2 \rightarrow A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

Fixando o algarismo “8” teremos $\rightarrow m = 8$ e $p = 2 \rightarrow A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

Como os acontecimentos são independentes a regra a ser aplicada é a regra da adição.

Logo teremos $4 \times 56 = 224$ números que começam com “0” e que deverão ser descontados.

Assim, a resposta procurada será $2520 - 224 = 2296$ números pares de 4 algarismos distintos poderão ser formados com os algarismos naturais.

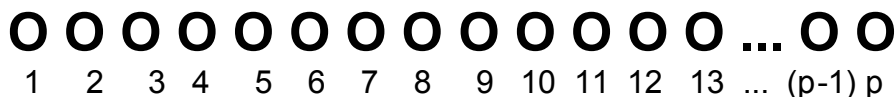
4.2. Arranjos com Repetição

São os arranjos de “m” elementos distintos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$, de tal modo que cada elemento pode entrar repetido até “p” vezes.

A notação adotada para indicar a operação de arranjo com repetição é $AR_{m,p}$ ou AR_m^p indicando que se trata de arranjo com repetição de “m” elementos tomados “p” a “p” elementos.

Para a obtenção da fórmula recursiva para o cálculo do número de arranjos com repetição vamos lançar mão do raciocínio anterior.

Sejam “m” elementos tomados “p” a “p”.



O **primeiro** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras.

O **segundo** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras.

O **terceiro** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras.

O **quarto** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras.

.

O “**P**” **ésimo** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras.

Como se trata de acontecimentos sucessivos, dependentes, a regra utilizada será a da multiplicação. Assim:

$$AR_m^p = m.m.m.m...m = m^p$$

Ou melhor

$$AR_m^p = m^p$$

009

Exemplo 17:

Quantos números de 3 algarismos nós podemos formar com os algarismos significativos?

Solução:

Pela aplicação direta da fórmula da equação 009 com $m = 9$ e $p = 3$ vem:

$$AR_9^3 = 9^3 = 729$$

Logo poderemos formar 729 números de 3 algarismos significativos.

Exemplo 18:

De quantas maneiras diferentes é possível encaçapar 5 bolas, uma em seguida da outra, em uma mesa de bilhar?

Solução:

De início, como a mesa de bilhar tem 6 caçapas e deveremos tomar 5 destas, sendo considerada a ordem das mesmas, temos um problema de arranjo. Como essas caçapas podem ser tomadas nas 5 encaçapadas, então temos um problema mais específico de arranjo com elementos repetidos.

Pela aplicação direta da fórmula da equação 009 com $m = 6$ e $p = 5$ para as caçapas vem:

$$AR_6^5 = 6^5 = 7776$$

Como as 5 bolas são todas distintas e elas também poderão ser encaçapadas em diferente ordem temos aqui um problema de permutação simples do conjunto.

Assim, pela aplicação direta da fórmula da equação 006 com:

$$m = 5$$

$$PC_5 = 5! = 120 \text{ maneiras.}$$

Como os acontecimentos são dependentes a regra a ser aplicada é a regra da multiplicação.

Logo poderemos encaixar 5 bolas em uma mesa de bilhar de $7776 \times 120 = 933.120$ maneiras diferentes.

5. Combinações

Combinações de “m” elementos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$, são os agrupamentos que podemos formar com os “m” elementos de modo que em cada agrupamento entrem os “p” elementos, diferindo um agrupamento do outro apenas pela natureza dos elementos.

5.1. Combinações Simples

São as combinações de “m” elementos distintos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$. Imaginemos um agrupamento formado pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto: {A B C D E}. Formemos agora novas combinações simples de 3 letras cada conforme seguinte:

A B C
A B D
A B E
A C D
A C E ... etc.

Observamos que a combinação nada mais é que um arranjo, descontados aqueles agrupamentos que possuem os mesmos elementos, não importando a ordem destes.

A notação adotada para indicar a operação de arranjo simples é $C_{m,p}$ ou C_m^p indicando que se trata de combinação de “m” elementos tomados “p” a “p”.

Para a obtenção da fórmula recursiva que permita o cálculo do número de combinações simples vamos lançar mão do conceito de arranjo.

Imaginemos formados os agrupamentos das combinações C_m^p . Tomemos uma dessas combinações que, como sabemos, diferem apenas pela natureza de seus elementos e não pela ordem. Vamos tomar a permutação desses “p” elementos o que transformará a operação em um arranjo de “m” elementos tomados “p” a “p”. Essa permutação vale $Pp = P!$.

Se tomarmos as combinações C_m^p formando os agrupamentos e procedendo de forma análoga teremos todos os agrupamentos de “p” elementos possíveis de formar com os “m” elementos, diferindo pela ordem e pela natureza e, como já foi dito, formam um arranjo A_m^p .

Assim podemos escrever a relação entre arranjo simples e combinação simples de “m” elementos tomados “p” a “p”.

$$A_m^p = (C_m^p)p!$$

$$C_m^p = \frac{A_m^p}{p!} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

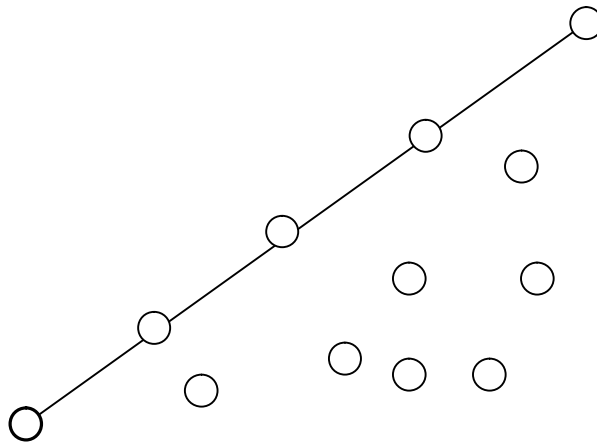
$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad 010$$

Exemplo 19:

Em um plano marcam-se 12 pontos dos quais 5 estão sobre uma mesma reta. Quantos triângulos nós podemos formar unindo 3 quaisquer desses pontos?

Solução:

Seja o seguinte esquema:



De início, como a ordem não interessa temos um problema de combinação.

Para os 7 pontos fora da reta, podemos combiná-los 3 a 3. Pela aplicação direta da fórmula da equação 010 com $m = 7$ e $p = 3$ teremos os seguintes triângulos.

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Triângulos com base fora da reta e vértice na reta, pela aplicação direta da fórmula da equação 010 com $m = 7$ e $p = 2$ nós teremos os seguintes triângulos.

$$5 \cdot C_7^2 = 5 \frac{7!}{2!(7-2)!} = 5 \frac{7!}{2!5!} = 5 \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = 5 \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 105$$

Triângulos com base na reta e vértice fora da reta, pela aplicação direta da fórmula da equação 010 com $m = 5$ e $p = 2$ teremos os seguintes triângulos.

$$7 \cdot C_5^2 = 7 \frac{5!}{2!(5-2)!} = 7 \frac{5!}{2!3!} = 7 \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 7 \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 70$$

Como se trata de eventos independentes a regra a ser utilizada será a regra da adição, logo poderemos traçar $35 + 105 + 70 = 210$ triângulos diferentes.

5.1. Combinações com Repetição

São as combinações de “m” elementos distintos tomados “p” a “p”, sendo sempre $m > p$. Vamos formar agrupamentos de “p” elementos cada, com os “m” elementos dados, com as seguintes condições:

- cada elemento pode aparecer até “p” vezes num agrupamento;
- um agrupamento se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos.

A notação adotada para indicar a operação de combinação com repetição é $CR_{m,p}$ ou CR_m^p indicando que se trata de combinação com repetição de “m” elementos tomados “p” a “p”.

Para a obtenção da fórmula recursiva que permita o cálculo do número de combinações com repetição bastará compreendermos que a essa operação da combinação tem muito a ver com a idéia de arranjo.

Sejam “m” elementos tomados “p” a “p”.



 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... (p-1) p

O **primeiro** lugar pode ser preenchido de “m” maneiras distintas.

O **segundo** lugar pode ser preenchido de (m-1) maneiras distintas + o **primeiro** e o **atual** repetidos. No total de (m+1) maneiras.

O **terceiro** lugar pode ser preenchido de (m-2) maneiras + o **primeiro**, o **segundo** e o **atual** repetidos. No total de (m+2) maneiras.

O **quarto** lugar pode ser preenchido de (m-3) maneiras + o **primeiro**, o **segundo**, o **terceiro** e o **atual** repetidos. No total de (m+3) maneiras.

.

.

.

O “P” ésimo lugar pode ser preenchido de [m + (p-1)] maneiras.

Como se trata de acontecimentos sucessivos, dependentes, a regra utilizada será a da multiplicação. Isso que foi desenvolvido acaba sendo um tipo de arranjo e como a relação entre a

fórmula de arranjo e a de combinação é $C_m^p = \frac{A_m^p}{p!}$ podemos deduzir que:

$$CR_m^p = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} = \frac{(m-1)!m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{(m-1)!p!}$$

$$CR_m^p = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!p!} = C_{m+p-1}^p$$

011

Exemplo 20:

Calcular o número de combinações com repetição que podemos formar com 8 elementos tomados 4 a 4.

Solução:

Pela aplicação direta da fórmula da equação 011 com $m = 8$ e $p = 4$ vem:

$$CR_8^4 = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!7!} = 330$$

Logo podemos formar 330 números.

6. Binômio de Newton

Binômio de Newton é a parte da matemática em que se estudam as propriedades e aplicação de produtos polinomiais simples servindo de base a várias outras áreas que necessitam do desenvolvimento finito em forma de séries facilitando a obtenção da lei de formação. No passado, quando não havia computadores, as deduções finitas e infinitas, comportadas na forma de séries, junto com o conceito de indução finita, foram importantes ferramentas de trabalho para matemáticos e físicos da época.

5.1. Coeficientes Binomiais

A definição de um coeficiente binomial de ordem “m” e classe “p” é dada pela fórmula seguinte:

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad 012$$

Na fórmula 012 os parâmetros “m” e “p” pertencem ao conjunto Z_+ dos números inteiros positivos, sendo sempre $p \leq m$. É a combinação de “m” elementos tomados “p” a “p”.

Os coeficientes binomiais dão origem a um importante dispositivo prático chamado de triângulo de Pascal. O triângulo nos permite encontrar os coeficientes relativos ao desenvolvimento do binômio de Newton tem a seguinte formação:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0^0 & & & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ C_m^0 & C_m^1 & C_m^2 & C_m^3 & \cdots & C_m^m & \end{array}$$

Na forma de números vem:

$$m=0 \rightarrow 1$$

$$m=1 \rightarrow 1 \quad 1$$

$$m=2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$m=3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$m=4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$m=5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$m=6 \rightarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$
 $\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$
 $\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

Notar que o parâmetro “m” marca a linha, enquanto o parâmetro “p” marca a coluna.

Exemplo 21:

Determinar os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(x+a)^4$ utilizando o dispositivo prático do triângulo de Pascal.

Solução:

Pela aplicação direta do procedimento com $m = 4$ obtemos a linha de números:

1 4 6 4 1

$$m=0 \rightarrow 1$$

$$m=1 \rightarrow 1 \quad 1$$

$$m=2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$m=3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$m=4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

A verificação será a seguinte:

$$(x+a)^4 = (x+a)^2 (x+a)^2$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+a)^4 = (x^2+2x+1)(x^2+2x+1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

5.3. Produtos de Stewin

Os desenvolvimentos na forma de produtos de binômios são conhecidos como produtos de Stewin e podem ser divididos conforme o grau da variável “x” seguindo a seguinte ordem:

dois binômios, temos:

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2$$

três binômios, temos:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x + a_1a_2a_3$$

quatro binômios, temos:

$$\begin{aligned} (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) &= x^4 + (a_1+a_2+a_3+a_4)x^3 + \\ &+ (a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_2+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2 + \\ &+ (a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x + (a_1+a_2+a_3+a_4) \end{aligned}$$

E, generalizando, vem:

$$\begin{aligned} (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)\dots(x+a_m) &= \\ &= x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + S_3x^{m-3} + \dots + S_{m-1}x + S_m \end{aligned}$$

013

Na equação 013, os coeficientes resultados do produto dos binômios são os seguintes:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \dots + a_1a_m$$

$$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \dots + a_1a_2a_m$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{array}$$

$$S_n = a_1a_2a_3\dots a_m$$

5.4. Binômio de Newton

Em 1663, Sir Isaac Newton formulou o teorema hoje conhecido como Binômio de Newton. Consideremos, no desenvolvimento dos produtos de Stevin, que os coeficientes sejam iguais, como seguinte:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_m = a$$

Assim nós temos para o produto $P(x)$ que:

$$P(x) = (x+a)(x+a)(x+a)(x+a)\dots(x+a) = (x+a)^m$$

Considerando a equação 013 anterior também podemos escrever que:

$$P(x) = x^m + s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} + s_3 x^{m-3} + \dots + s_{m-1} x + s_m \quad 014$$

Onde

$$S_1 = a + a + a + \dots + a = C_m^1 a$$

$$S_2 = a.a + a.a + a.a + \dots + a.a = C_m^2 . a^2$$

$$S_3 = a.a.a + a.a.a + a.a.a + \dots + a.a.a = C_m^3 . a^3$$

·
·
·

$$S_n = a.a.a \dots a = C_m^m . a^m$$

Deste modo podemos então escrever que:

$$P(x) = x^m + C_m^1 . a . x^{m-1} + C_m^2 . a^2 . x^{m-2} + C_m^3 . a^3 . x^{m-3} + \dots + C_m^{m-1} . a^{m-1} . x + C_m^m . a^m = (x+a)^m$$

015

A equação 015 anterior é a fórmula geral do desenvolvimento do chamado "Binômio de Newton".

Nota: Principais Características do Binômio de Newton

1. O produto dos binômios ordenado é um polinômio ordenado e completo em relação à variável, no nosso caso, "**x**".
2. O número de termos do produto é igual à ordem do binômio mais um, ou seja, "**(m+1)**", onde "**m**" é a ordem do binômio.

3. O expoente de “x” decresce de uma unidade até o último termo no qual ele é nulo.
4. O binômio de Newton trata-se de um polinômio mônico, ou seja, o coeficiente do termo de mais alto grau é sempre a unidade.
5. O termo independente é “ a^m ” onde “m” é a ordem do binômio.
6. O termo de ordem “(p+1)” do binômio de Newton é dado pela fórmula:

$$T_{p+1} = C_m^p . a^p . x^{m-p} \quad 016$$

7. A soma dos coeficientes, em valor absoluto, de um binômio da forma $(x + a)^m$ é igual a 2^m .
8. Quando a ordem “m” do binômio de Newton for par, o termo de maior coeficiente é o termo médio de ordem $(\frac{m}{2} + 1)$.
9. Quando a ordem “m” do binômio de Newton for ímpar, existirão dois termos de maior coeficiente e serão, respectivamente, os de ordem $(\frac{m+1}{2})$ e $[(\frac{m+1}{2}) + 1]$.

Exemplo 22:

Desenvolver o binômio $(x+1)^4$.

Solução:

Pela aplicação direta das equações 014 e 015 com $m = 4$ obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} (x+1)^4 &= x^4 + C_4^1 . x^{4-1} + C_4^2 . x^{4-2} + C_4^3 . x^{4-3} + C_4^4 = \\ &= x^4 + C_4^1 . x^3 + C_4^2 . x^2 + C_4^3 . x + C_4^4 = \\ &= x^4 + 4 . x^3 + 6 . x^2 + 4 . x + 1 \end{aligned}$$

Exemplo 23:

Calcular, sem desenvolver os produtos, o 3º. termo do binômio $(3x-8)^5$.

Solução:

Pela aplicação direta da equação 016, com $m = 5$ $P+1=3$, obtemos o seguinte:

$$P=3-1=2$$

Logo, pela fórmula 016 vem:

$$T_{2+1} = C_5^2 \cdot (-8)^2 \cdot (3x)^{(5-2)} = \frac{5!}{3!2!} \cdot 64 \cdot (3x)^3 = 17.280x^3$$

$$T_3 = 17.280x^3$$

Exemplo 24:

Provar que a soma dos termos de um binômio de Newton de ordem “m” na forma $(x+a)^m$ é dado por 2^m .

Solução:

Pela aplicação direta da equação 015, sabemos que o desenvolvimento de um binômio de Newton é dado por:

$$P(x) = x^m + C_m^1 \cdot a \cdot x^{m-1} + C_m^2 \cdot a^2 \cdot x^{m-2} + C_m^3 \cdot a^3 \cdot x^{m-3} + \dots + C_m^{m-1} \cdot a^{m-1} \cdot x + C_m^m \cdot a^m = (x+a)^m$$

Vamos encontrar o valor da soma dos coeficientes:

$$\Sigma C(x) = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m$$

$$\Sigma C(x) = \frac{m!}{0!(m-0)!} + \frac{m!}{1!(m-1)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} + \frac{m!}{3!(m-3)!} + \dots$$

$$\Sigma C(x) = \frac{m!}{m!} + \frac{m!}{(m-1)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} + \frac{m!}{3!(m-3)!} + \dots$$

$$\Sigma C(x) = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} + \dots \quad 017$$

Observando a equação 017 observamos o seguinte desenvolvimento para cada ordem de binômio:

$$\text{Para } m=0 \rightarrow \Sigma C(x) = 1 = 2^0$$

$$\text{Para } m=1 \rightarrow \Sigma C(x) = 1 + m = 1 + 1 = 2^1$$

$$\text{Para } m=2 \rightarrow \Sigma C(x) = 1 + m + \frac{1}{2!} m(m-1) = 1 + 2 + 1 = 2^2$$

Para $m=3 \rightarrow \sum C(x) = 1 + m + \frac{1}{2!}m(m-1) + \frac{1}{3!}m(m-1)(m-2) = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$

·
·
·

Para $m=m \rightarrow \sum C(x) = 1 + m + \frac{1}{2!}m(m-1) + \frac{1}{3!}m(m-1)(m-2) + \dots = 2^m$

Assim fica comprovado que a soma dos coeficientes de todos os termos de um binômio de Newton de ordem “m” na forma $(x+a)^m$ é 2^m .

Bibliografia

1. **RL Graham, MGroetschel, L Lovasz** *Handbook of Combinatorics* Vols 1 e 2, MIT Press Editors, 1996.
2. **RP Stanley** *Enumerative Combinatorics* Vols 1 e 2, Cambridge University Press, 1999.
3. **JD Silva, VS Fernandes, OD Mabelini** *Apostila Matemática do IBEP* Companhia Editora Nacional, São Paulo, 2003.