SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

PROPRIEDADE DA SIMETRIA DE TENSORES

Com Referência à Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein

L. R. GOMES

1. INTRODUÇÃO

No desenvolvimento de sua *Teoria da Relatividade Geral*, no famoso artigo de 1916, Albert Einstein apresenta, na dedução geral, uma propriedade que não é demonstrada de maneira didática, o que será feito nesse pequeno informe no sentido de ajudar a quem quer que seja.
A propriedade se refere à condição de simetria apresentada por um determinado tensor cuja aplicação dos símbolos de Christoffel é básica na formulação da *Teoria da Relatividade Geral*.

2. EXPLICAÇÃO DO PROBLEMA

Dentro do campo da matemática e da física, os símbolos de Christoffel, assim assinalados pelo matemático e físico germânico Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), são expressões em coordenadas gerais para a conexão de Levi-Civita derivada do tensor métrico. Em sentido amplo, as derivadas covariantes de uma conexão arbitrária, não necessariamente métrica, em uma base coordenada geral, são normalmente chamadas de símbolos de Christoffel, obedecendo a determinadas particularidades que aprimoram e generalizam uma série de operações facilitando o processo metodológico de exposição do problema quer seja no campo da física quer seja no campo puramente matemático.
Na teoria matemática do cálculo tensorial, a derivada covariante de um tensor qualquer é uma operação que difere da derivada ordinária comum também conhecida como derivada intrínseca ou absoluta por envolver uma operação no domínio do tempo. Diferente desta, a derivada covariante surge no decurso de operações específicas formuladas a partir da manipulação algébrica envolvendo tensores.
O caso aqui em foco está associado com uma equação na forma tensorial apresentada por Einstein envolvendo um tensor misto, ou seja, covariante e contravariante, de ordem dois, onde é utilizada a derivada covariante em relação a uma variável ou coordenada geral.

3. APLICAÇÃO DO PROBLEMA

Seja considerar uma equação na forma tensorial onde aparece a operação de derivada covariante de um tensor *A* conforme a relação seguinte:

$$A^{\alpha\,\beta}_{,\sigma} = \frac{\partial A^{\propto\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma \;\; x \end{Bmatrix} A^{x\beta} + \begin{Bmatrix} \beta \\ \sigma \;\; x \end{Bmatrix} A^{\sigma x} \tag{001}$$

A equação 001 anterior mostra um exemplo de derivada covariante utilizada por Einstein de um tensor contravariante de ordem dois apresentada na referência 1. Considerando, agora, a referência 2, a fórmula recursiva para uma determinada operação de derivada covariante de um tensor contravariante de ordem dois, conforme mostrado na equação 001, seria a seguinte:

$$A^{p1\,p2}_{,q} \triangleq \frac{\partial A^{p1\,p2}}{\partial x^{q}} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ q \;\; s \end{Bmatrix} A^{s\,p2} + \begin{Bmatrix} p_2 \\ q \;\; s \end{Bmatrix} A^{p1\,s} \qquad (002)$$

Na equação 002, a representação entre chaves é a simbologia adotada para a retratação do símbolo de Christoffel de segunda espécie conforme a seguinte convenção:

- <u>símbolo de Christoffel de 2ª. espécie</u>:

$$\begin{Bmatrix} s \\ p \;\; q \end{Bmatrix} = g^{sr}\ [pq, r] \qquad (003)$$

- <u>símbolo de Christoffel de 1ª. espécie</u>:

$$[pq, r] = \frac{1}{2}\ [\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^{q}} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^{p}} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^{r}}] \qquad (004)$$

A equação a ser analisada corresponde à equação a seguir onde Einstein se utiliza de um tensor misto de segunda ordem, covariante de ordem um e contravariante de ordem um também. Para a derivada covariante de um tensor misto, em relação a uma única variável ou coordenada geral, a fórmula recursiva é a seguinte:

$$A^{p1}_{r1,q} \triangleq \frac{\partial A^{p1}_{r1}}{\partial x^{q}} - \begin{Bmatrix} s \\ r_1 \;\; q \end{Bmatrix} A^{p1}_{s} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ q \;\; s \end{Bmatrix} A^{s}_{r1} \qquad (005)$$

Aplicando a fórmula recursiva da equação 005 vem que:

$$A^{\sigma}_{\mu,\sigma} = \frac{\partial A^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \;\; \tau \end{Bmatrix} A^{\tau}_{\mu} - \begin{Bmatrix} \tau \\ \mu \;\; \sigma \end{Bmatrix} A^{\sigma}_{\tau} \qquad (006)$$

Na equação anterior, Einstein aplicou uma propriedade da teoria de tensores chamada de contração na qual se deriva uma variável sobre ela mesma a fim de se promover a redução da complexidade algébrica envolvida.

Na equação 006, sendo *g* a matriz associada à métrica do tensor *A*, prova-se que:

$$\frac{\partial A^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma \;\; \tau \end{Bmatrix} A^{\tau}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\sqrt{g}A^{\sigma}_{\mu}) \qquad (007)$$

Deste modo, a equação 006 tomará a seguinte forma:

$$A^{\sigma}_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\sqrt{g}A^{\sigma}_{\mu}) - \begin{Bmatrix} \tau \\ \mu \;\; \sigma \end{Bmatrix} A^{\sigma}_{\tau} \qquad (008)$$

Desenvolvendo-se o último termo da equação 008 vem que:

$$\left\{ {\tau \atop \mu\ \ \sigma} \right\} A^{\sigma}_{\tau} = g^{\tau r}\,[\mu\sigma, r]\,A^{\sigma}_{\tau} = [\mu\sigma, r]\,g^{\tau r} A^{\sigma}_{\tau} = [\mu\sigma, r] A^{r\sigma} \tag{009}$$

Da equação 009, pode-se desenvolver a seguinte equação a partir da definição do símbolo de Christoffel de 1ª. espécie:

$$[\mu\sigma, r] A^{r\sigma} = \frac{1}{2}\,[\frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{r}}] A^{r\sigma} \tag{010}$$

A partir da equação 010 anterior, serão desenvolvidas apenas duas de suas parcelas conforme a seguinte forma:

$$(\frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{r}}) A^{r\sigma} = \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{r}} A^{r\sigma} = \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \delta^{r}_{\sigma}\delta^{\sigma}_{r} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{r}} A^{r\sigma} =$$

$$= \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{r}} \delta^{r}_{\sigma} A^{r\sigma} \delta^{\sigma}_{r} \delta^{r}_{\sigma} = \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{r}} \delta^{r}_{\sigma} A^{\sigma r} =$$

$$= \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{1}{\delta^{\sigma}_{r}} \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{r}} A^{\sigma r} = \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma r}$$

Para a obtenção do que se desejava, laçou-se mão do conceito de uma função especial conhecida como delta de Kronecker, representada aqui pela letra grega δ, que tem a seguinte ação:

$$\delta^{p}_{q} = \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{q}} \quad \therefore \quad \delta^{p}_{q} = 1\ se\ p = q\ \ e\ \ \delta^{p}_{q} = 0\ se\ p \neq q$$

Agora, sendo o tensor *A* um tensor simétrico, isso significa que $A^{r\sigma} = A^{\sigma r}$, logo:

$$\frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{r\sigma} - \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma r} = (\frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\mu r}}{\partial x^{\sigma}}) A^{r\sigma} = 0$$

Sendo assim, com $A^{r\sigma} \neq 0$, a equação 010 se resume a:

$$[\mu\sigma, r] A^{r\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} A^{r\sigma} \tag{011}$$

Assim também, a equação 009 se resumirá em:

$$\left\{ {\tau \atop \mu\ \ \sigma} \right\} A^{\sigma}_{\tau} = [\mu\sigma, r] A^{r\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} A^{r\sigma} \tag{012}$$

Logo, a equação 008 anterior tomará a seguinte forma:

$$A^{\sigma}_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\sqrt{g} A^{\sigma}_{\mu}) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} A^{r\sigma} \tag{013}$$

E, considerando-se a contração, para a equação 013, vem que:

$$\sqrt{g} A_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\sqrt{g} A^{\sigma}_{\mu}) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} \sqrt{g} A^{r\sigma} \tag{014}$$

Sabe-se, também, que o produto interno de tensores, uma operação semelhante ao produto escalar de vetores, gera um valor numérico escalar. Assim sendo vem que:

$$g^{r\sigma}\ g_{r\sigma} = k \quad \text{, sendo } k \text{ uma constante} \tag{015}$$

Tomando-se a diferencial da equação 015, vem que:

$$\partial(g^{r\sigma}\ g_{r\sigma}) = 0$$

Logo, desenvolvendo a equação anterior, obtém-se:

$$(\partial g^{r\sigma})\ g_{r\sigma} + g^{r\sigma}\ (\partial g_{r\sigma}) = 0 \quad \therefore \quad g^{r\sigma}\ (\partial g_{r\sigma}) = -g_{r\sigma}(\partial g^{r\sigma})$$

A partir da equação anterior, pode-se escrever que:

$$(\partial g_{r\sigma}) g^{r\sigma} A^{r\sigma}_{r\sigma} = -(\partial g^{r\sigma}) g_{r\sigma} A^{r\sigma}_{r\sigma}$$

Assim:

$$(\partial g_{r\sigma}) A^{r\sigma} = -(\partial g^{r\sigma}) A_{r\sigma} \tag{016}$$

Ou então, multiplicando membro a membro por $\sqrt{\mathrm{g}}$:

$$(\partial g_{r\sigma}) \sqrt{\mathrm{g}} A^{r\sigma} = -(\partial g^{r\sigma}) \sqrt{\mathrm{g}} A_{r\sigma} \tag{017}$$

E, finalmente, vem que:

$$\sqrt{g} A_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\sqrt{g} A^{\sigma}_{\mu}) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\sigma r}}{\partial x^{\mu}} \sqrt{\mathrm{g}}\, A_{\sigma r} \tag{018}$$

4. CONCLUSÃO

Essa propriedade, aqui apresentada, garante então que a aplicação do símbolo de Christoffel de 1ª. espécie sobre um tensor de segunda ordem, simétrico, conforme foi mostrado, é possível.
Para a devida comparação, ver o artigo de Einstein, de 1916, intitulado de "Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral", subitem 11, equações 41ª e 41b.
A equação final obtida será a equação 018 cujo desenvolvimento algébrico foi aqui demonstrado.

REFERÊNCIAS

1. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *artigos incluídos no livro O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE – Textos Fundamentais da Física Moderna – Vol I, Fundação Calouste Gulbenkian – Lisboa – Portugal – 1958*.

2. M. R. Spiegel, *ANÁLISE VETORIAL COM INTRODUÇÃO À ANÁLISE TENSORIAL*, Editora McGraw-Hill do Brasil – São Paulo – Brasil – 1972.

3. M. R. Spiegel, *MATHEMATICAL HANDBOOK OF FORMULAS AND TABLES*, McGraw-Hill Book Co. – New York – USA – 1968.

4. R. M. Wald, *GENERAL RELATIVITY*, The University of Chicago Press – Chicago– USA – 1984.