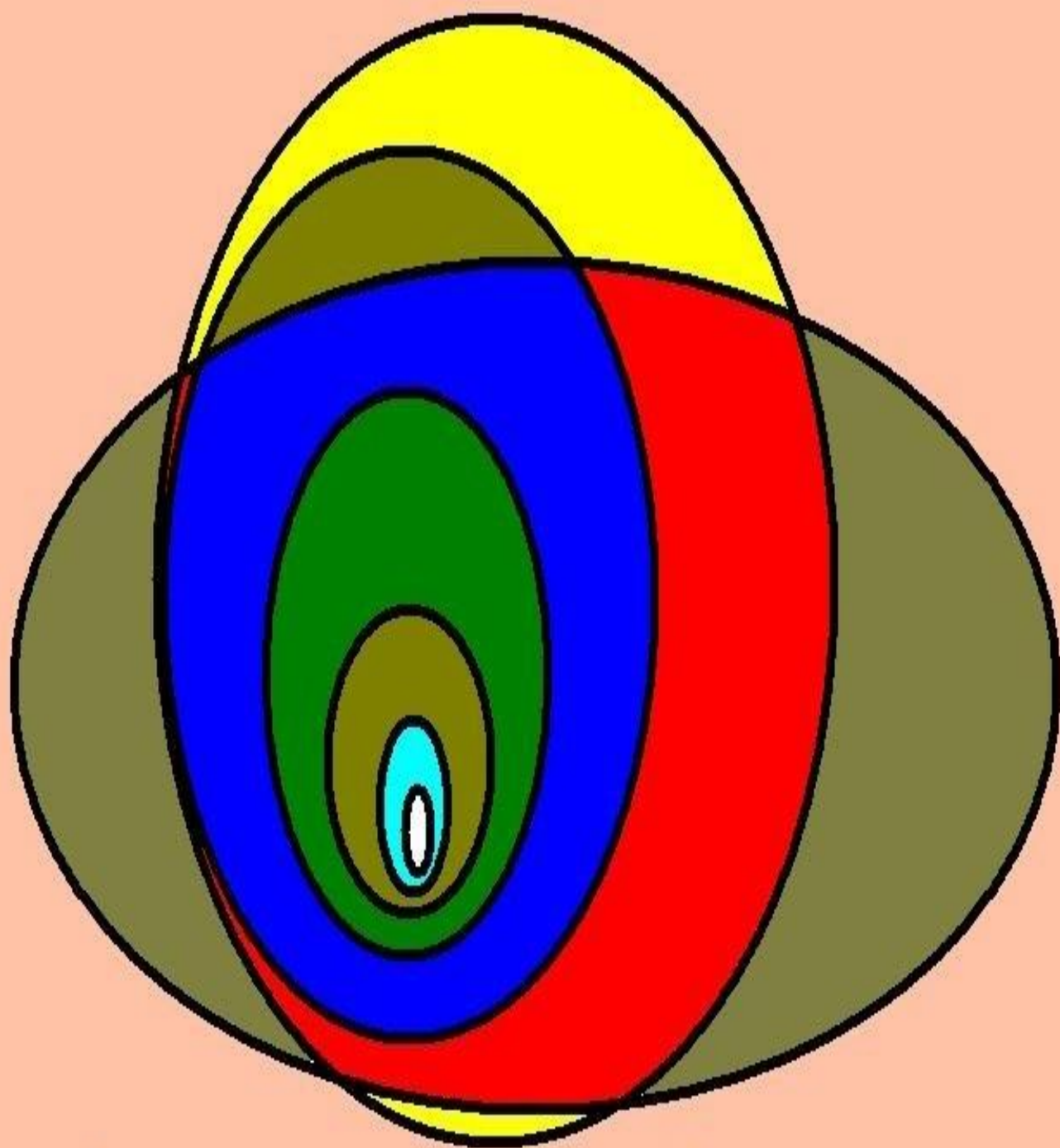




TÓPICOS DE REGULAÇÃO E CONTROLE AUTOMÁTICO DE MÁQUINAS SÍNCRONAS

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva

Tópicos de regulação e controle automático de máquinas síncronas

1ª Edição

BELO HORIZONTE
2018
Edição do Autor

FICHA CATALOGRÁFICA

Gomes, L. R. e Silva, C. H. F.

Tópicos de regulação e controle automático de máquinas síncronas [livro eletrônico] – Belo Horizonte: Editor: Silva, C. H. F., 2018.

0,9 MB; e PUB.

ISBN 978-85-455271-1-4

1. Regulação de velocidade de turbinas hidráulicas 2. Regulação de tensão de máquinas síncronas energéticos. I. Gomes, Luiz Renato. II. Silva, Cláudio Homero Ferreira III. Título.

CDD: 620

Apresentação

Esse encarte traz dois temas voltados para o controle automático atuante sobre o sistema regulador de velocidade e tensão de usinas de energia elétrica onde são utilizadas as técnicas do controle moderno no sentido de tornar a operação em rede interligada mais confiável.

O tema principal foca a análise da estabilidade dinâmica do sistema frente a ocorrências de abertura de linhas de transmissão quando é verificada a comutação entre as condições operativas rede interligada e rede isolada.

Como é bem sabido, o desempenho de reguladores de velocidade nessas situações, dependendo do impacto gerado pela saída de grandes blocos de geração, é bastante prejudicado pela alteração significativa no valor do torque sincronizante da área restante.

A proposição de um regulador a base da realimentação de estado é mostrada em dois capítulos onde a técnica proposta permite que se ataque esse problema de maneira objetiva e prática.

Sumário

CAPÍTULO 1 - ÍNDICES DE DESEMPENHO EM SISTEMAS DE CONTROLE AUTOMÁTICO	5
1.1. Introdução	5
1.2. Revisão da Teoria Clássica.....	6
1.3. Equações de Hamilton do Movimento	9
1.4. Aplicação na Teoria de Controle	13
1.5. Abordagem Discreta.....	17
1.6. Considerações Finais.....	21
1.7. Referências	22
CAPÍTULO 2 - REGULADOR DE VELOCIDADE POR CONTROLE MODERNO VIA EQUAÇÃO DE RICCATI.....	23
2.1. Introdução	24
2.2. Revisão da Teoria Clássica.....	24
2.3. Equações de Hamilton do Movimento	26
2.4. Aplicação na Teoria de Controle	28
2.5. Abordagem Discreta.....	32
2.6. Exemplo Prático	35
2.7. Considerações Finais.....	44
2.8. Referências	45
CAPÍTULO 3 - FENÔMENO DE AUTOEXCITAÇÃO EM GERADORES DE ENERGIA ELÉTRICA	47
3.1. Explicação Geral Acerca de Máquinas Síncronas.....	47
3.2. Equações da Máquina Síncrona	50
3.3. Considerações Finais.....	91
3.4. Referências	91

CAPÍTULO 1 - ÍNDICES DE DESEMPENHO EM SISTEMAS DE CONTROLE AUTOMÁTICO

RESUMO – Este artigo tem por finalidade apresentar uma discussão acerca da utilização de determinados índices de performance e desempenho aplicáveis na teoria de controle ótimo de sistemas automáticos. A busca pelo controle ótimo, idéia aplicada ao estudo da teoria de controle moderno, baseia-se na tomada de decisão com base nesses índices formulados a partir de formas quadráticas cujo foco principal é a minimização da energia total gasta pela dinâmica desses sistemas no sentido de se obter uma condição de estabilidade operativa. A base do estudo levará em conta o princípio de Hamilton a partir das equações de Lagrange quando serão implementadas técnicas dentro da matemática contínua quanto da matemática discreta.

Palavras-Chave: Teoria de Controle Ótimo, Índices de Desempenho de Controle, Controle Moderno.

Lista das Principais Variáveis

X : vetor das variáveis de estado de ordem $nx1$

U : vetor das variáveis de entrada de ordem $mx1$

A : matriz das variáveis de estado da planta de ordem nxn

B : matriz das variáveis de entrada da planta de ordem nxm

F : correspondente da matriz A no plano discreto

G : correspondente da matriz B no plano discreto

Q : matriz de ponderação das variáveis de estado de ordem nxn

Z : matriz de ponderação das variáveis de entrada de ordem mxm

n : ordem das variáveis de estado do sistema

m : ordem das variáveis de entrada do sistema

M : massa

f : força

x, y, z, q, p : coordenadas ou variáveis de estado

1.1. Introdução

A técnica do controle ótimo aplicada a sistemas de controle automáticos é um método ligado ao controle moderno cujo fundamento consiste no controle de sistemas pela utilização de uma ferramenta baseada na modelagem por variáveis de estado. A abordagem por variáveis de estado tem como fundamento a utilização de uma modelagem estruturada na forma matricial com grande abrangência nos estudos atuais.

Assim como em qualquer tratamento de análise de sistemas de controle automático, também aqui o importante é a operação estável o que coloca o estudo da estabilidade como o fulcro dessa abordagem.

Um dos recursos mais importantes tanto na análise quanto na solução do problema da instabilidade de sistemas de controle é a utilização da realimentação de estado orientada pela minimização de índices de desempenho.

O presente trabalho mostra o desenvolvimento, a elaboração e a aplicação de dois tipos de índices, sendo um com foco na dinâmica contínua e outro com foco na dinâmica digital dos sistemas de controle. Ver referências [1], [3], [6] e [7].

1.2. Revisão da Teoria Clássica

Qualquer estudo que se faça no campo da teoria de controle envolve com conceitos da teoria clássica da dinâmica de partículas e corpos rígidos. Para investigar a dinâmica de partículas ou mesmo de corpos rígidos é vantajoso especificar as posições do movimento dessas partículas no espaço por meio de variáveis independentes do que denotar tais posições através de coordenadas retangulares porque nem todas as coordenadas retangulares poderão ser independentes durante a análise. Quando isso acontece depara-se com um complicador.

Seja considerar um sistema consistindo de r massas $M_1, M_2, M_3, \dots, M_r$, dispostas no espaço tridimensional cujas coordenadas sejam os seguintes agrupamentos $(x_1, x_2, x_3); (x_4, x_5, x_6); (x_7, x_8, x_9); \dots; (x_{3r-2}, x_{3r-1}, x_{3r})$. Seja considerar agora as respectivas forças atuantes sobre as r massas como sendo o conjunto de elementos $(f_1, f_2, f_3); (f_4, f_5, f_6); (f_7, f_8, f_9); \dots; (f_{3r-2}, f_{3r-1}, f_{3r})$. A equação básica de todo movimento será dada pela segunda lei de Newton do seguinte modo:

$$M_i \ddot{x}_i = f_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 3r \quad (1.1)$$

Para que haja concordância nessa proposição, as massas deverão seguir a condição: $(M_1=M_2=M_3); (M_4=M_5=M_6); (M_7=M_8=M_9); \dots; (M_{3r-2}=M_{3r-1}=M_{3r})$. A equação 1.1 representa o movimento das massas na ausência de qualquer tipo de restrição que possa criar algum tipo de dependência entre as variáveis x_i . Agora, se o sistema admitir as seguintes restrições:

$$\xi_j = \xi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3r}) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, s$$

Então, é possível dizer que existem s variáveis linearmente dependentes e que o sistema ainda apresenta $3r-s$ variáveis linearmente independentes de modo que:

$$\xi_j = \xi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3r}) \neq 0 \quad j = (s+1), (s+2), (s+3), \dots, 3r$$

Assim, para as novas variáveis $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$, onde $k=3r-s$ que formam um conjunto de variáveis independentes, tem-se que

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k) \neq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 3r$$

As novas coordenadas q_i são chamadas de coordenadas gerais ou generalizadas. Para informação, o número de coordenadas gerais é igual ao número de graus de liberdade do sistema em questão. Ver referência 3. Para a obtenção do princípio de Hamilton, serão utilizadas as equações de Lagrange para o movimento em função das coordenadas gerais $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$.

O *princípio de Hamilton* é abstraído do *princípio de D'Alembert* que declara que a força aplicada a um sistema junto com a força de inércia a ele associada formam um conjunto único em equilíbrio, desconsiderando aqui qualquer restrição. De maneira geral, pode-se escrever a seguinte expressão considerando um espaço físico tridimensional em função do desvio diferencial especial δ aqui inserido por comodidade:

$$\sum_{i=1}^n [(M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - f_{(x)_i}) \delta x_i + (M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - f_{(y)_i}) \delta y_i + (M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - f_{(z)_i}) \delta z_i] = 0 \quad (1.2)$$

Segundo o desenvolvimento que pode ser visto na referência [3], a equação anterior admite ser realinhada, tomando esta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[M_i \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i - \frac{dz_i}{dt} \delta z_i \right) \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^n \left\{ M_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \right\} + \sum_{i=1}^n (f_{(x)_i} \delta x_i + f_{(y)_i} \delta y_i + f_{(z)_i} \delta z_i) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Na equação 1.3, a partir do segundo membro, notam-se duas parcelas, uma representando a energia cinética e a outra a energia potencial. A associação considera as n partículas do sistema em questão. A partir daqui não se fará

referência aos corpos rígidos por questões de simplificação do texto, nada mais que isso.

Agora é possível sintetizar toda a dinâmica numa única equação em função da diferença entre a energia cinética e a energia potencial da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n [M_i (\frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i - \frac{dz_i}{dt} \delta z_i)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (1.4)$$

Se as posições das partículas do sistema são fixadas para cada tempo específico t_1 e t_2 , as variações diferenciais δx_i , δy_i e δz_i serão nulas o que permitirá escrever que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (1.5)$$

A equação 1.5 é conhecida como a equação do *princípio de Hamilton* e determina que a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V de um sistema dinâmico é zero na condição de equilíbrio. Na equação 1.5, tem-se então que:

$$\delta T = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^n \{ M_i [(\frac{dx_i}{dt})^2 + (\frac{dy_i}{dt})^2 + (\frac{dz_i}{dt})^2] \} \quad (1.6)$$

e

$$\delta V = - \sum_{i=1}^n (f_{(x)i} \delta x_i + f_{(y)i} \delta y_i + f_{(z)i} \delta z_i) \quad (1.7)$$

Definindo agora a variável L relativa ao lagrangeano em função do princípio de Hamilton tem-se que:

$$L = T - V \quad (1.8)$$

onde $L = L(\dot{q}_i, q_i)$

Deste modo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(\dot{q}_i, q_i) dt = 0 \quad (1.9)$$

Em termos de diferencial total, a partir da equação 1.9, é possível escrever que:

$$\delta L(\dot{q}_i, q_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.10)$$

Considerando, agora, que o sistema em questão tem n variáveis independentes, pela equação 1.9 vem que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0 \quad (1.11)$$

Sabe-se que a seguinte passagem também é possível:

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d(\delta q_i)}{dt}$$

Com isso, a equação 1.11 poderá ser reescrita tomando a seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \quad (1.12)$$

Sabe-se que para posições fixas das coordenadas gerais $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, nos tempos específicos t_1 e t_2 , as variações diferenciais δq_i são nulas. Porém, para um caso arbitrário em que se possa ter $\delta q_i \neq 0$ então a seguinte relação deverá prevalecer:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.13)$$

A passagem da equação 1.12 para a equação 1.13 só foi possível quando se considerou L variando no domínio do tempo e que as variações das posições das novas coordenadas eram diferentes de zero. A equação 1.13 é conhecida como a equação de Lagrange para o movimento de partículas dentro do campo da dinâmica do ponto material.

1.3. Equações de Hamilton do Movimento

As funções de Lagrange podem ser reescritas a partir das equações de Hamilton que são dadas por:

$$H = T + V \quad (1.14)$$

Assim

$$L = T - V = 2T - H \quad (1.15)$$

A proposição agora é trabalhar não só com as variáveis q_i , mas também com as variáveis p_i . As variáveis p_i são assim definidas em função das variáveis $\dot{q}_i$.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + a_{13}\dot{q}_3 + \dots + a_{1n}\dot{q}_n \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + a_{23}\dot{q}_3 + \dots + a_{2n}\dot{q}_n \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = a_{31}\dot{q}_1 + a_{32}\dot{q}_2 + a_{33}\dot{q}_3 + \dots + a_{3n}\dot{q}_n \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = a_{n1}\dot{q}_1 + a_{n2}\dot{q}_2 + a_{n3}\dot{q}_3 + \dots + a_{nn}\dot{q}_n \end{aligned} \quad (1.16)$$

Com a mudança proposta, a energia em jogo será a energia cinética de T que representa a energia cinética de todo o sistema de n partículas. Lembrando que a energia cinética total, em função da posição de cada partícula do sistema, é dada pela seguinte relação:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j (\dot{x}_j)^2 \quad (1.17)$$

É importante salientar que as variáveis em jogo nesse momento são aquelas variáveis linearmente independentes que constituem o sistema uma vez que não interessa trabalhar com as variáveis que são linearmente dependentes, pois elas não resolvem o problema.

Aqui é possível associar a equação 1.17 com as variáveis independentes numa forma quadrática relacionada à energia cinética envolvida. Assim,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n [a_{ij} \dot{q}_j] \dot{q}_i \right] \right\} \therefore 2T = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n [a_{ij} \dot{q}_j] \dot{q}_i \right] \quad (1.18)$$

Portanto, com base na equação 1.16, obtém-se:

$$2T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (1.19)$$

Aplicando as equações 1.5 e 1.15 relativas ao princípio de Hamilton, a equação 1.19 poderá ser assim utilizada numa nova formulação, senão veja-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - H \right) dt \quad (1.20)$$

Substituindo na equação 1.20 as variáveis p_i dadas nas equações 1.16 obtém-se a seguinte expressão:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n [\delta(p_i \dot{q}_i) - \delta H] dt = 0 \quad (1.21)$$

Analisando, particularmente, o segundo membro da equação 1.21 vem que:

$$\delta(p_i \dot{q}_i) = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i \quad (1.22)$$

e

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \quad (1.23)$$

Substituindo na equação 1.21 as expressões das equações 1.22 e 1.23 e agrupando o resultado de maneira adequada obtém-se que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] dt = 0 \quad (1.24)$$

Trabalhando melhor o segundo membro da equação 1.24, mais precisamente o termo $\int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i) dt = 0$, pode-se assim proceder. Seja a função $w = p_i \delta q_i$ e a sua derivada no domínio do tempo conforme o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) = p_i \frac{d}{dt} (\delta q_i) + \delta q_i \frac{d}{dt} (p_i) = p_i \delta \left(\frac{d q_i}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (p_i) \delta q_i = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{p}_i \delta q_i \quad (1.25)$$

Com base na equação 1.25 pode-se promover a seguinte integração:

$$\int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{p}_i \delta q_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} d(p_i \delta q_i) = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.26)$$

Para os pontos fixos do sistema dinâmico, especificamente, em t_1 e t_2 , separadamente, sabe-se que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Deste modo, a partir da equação 1.26, obtém-se que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i) dt = - \int_{t_1}^{t_2} (\dot{p}_i \delta q_i) dt \quad (1.27)$$

Considerando-se a expressão obtida da equação 1.27, a equação anterior 1.24 tomará a seguinte forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n [(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) \delta p_i - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}) \delta q_i] dt = 0 \quad (1.28)$$

Quando são considerados valores arbitrários para as diferenciais δq_i e δp_i , tal que $\delta q_i \neq 0$ e $\delta p_i \neq 0$, as seguintes relações ficam evidenciadas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.29)$$

e

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.30)$$

As equações 1.29 e 1.30 são conhecidas como equações de Hamilton do movimento dinâmico para um sistema onde $H=T+V$, conforme equação 1.14.

Um sistema com um grau de liberdade k onde é possível estipular um conjunto com um espaço dimensional da ordem de $2k$, com as coordenadas gerais q_i e p_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$, é chamado de espaço de fase. As equações de Hamilton fornecem as componentes de velocidade de um determinado ponto do espaço de estado. Ficam, então, definidas as equações 1.29 e 1.30 como componentes de um conjunto de $2k$ equações diferenciais de primeira ordem na seguinte forma genérica:

$$\dot{q}_i = g_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k; p_1, p_2, p_3, \dots, p_k) \quad (1.31)$$

e

$$\dot{p}_i = h_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k; p_1, p_2, p_3, \dots, p_k) \quad (1.32)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

Desde que essas $2k$ variáveis sejam a menor coleção de números que possam ser especificadas no sentido de descrever completamente a dinâmica de um determinado sistema essas variáveis são as variáveis de estado desse sistema.

1.4. Aplicação na Teoria de Controle

A teoria de controle moderno se utiliza dos chamados índices de desempenho para a efetivação de sua ação sobre a dinâmica dos sistemas em geral. Esses índices nada mais são que formas quadráticas em função da combinação das diversas variáveis de estado que compõem o sistema. Elas formam um conjunto mínimo de equações que descrevem completamente a dinâmica do sistema em questão.

A aplicação do princípio de Hamilton da teoria clássica da dinâmica, assim como foi visto anteriormente, introduz o conceito de espaço de fase estendido ao conceito de espaço de estado com um forte apelo na formulação do conceito de controle ótimo com base em índices desempenho.

A diferença é que não só serão utilizadas as variáveis de estado, mas também as variáveis de entrada externa ao sistema.

Existem várias proposições de formulação dos índices de desempenho, também conhecidos como índices de *performance*.

Um exemplo bem usual é aquele que agrega as variáveis de estado e ao mesmo tempo as variáveis de entrada externa na forma mostrada a seguir, onde T denota matriz transposta:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t [X^T Q X + U^T Z U] dt \quad (1.33)$$

relativamente à equação de uma planta ou sistema de controle automático na conhecida forma canônica de variáveis de estado, representada em seguida.

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1.34)$$

A técnica de realimentação de estado, um procedimento comum no processo de estabilização em sistemas de controle automático, pode ser equacionada dentro da forma padrão de variáveis de estado a partir da equação matricial da planta 1.34. Para realimentação de estado tem-se que:

$$U = -Kx \quad (1.35)$$

onde K_r é a matriz de realimentação de ordem $q \times n$. Deste modo, considerando a equação 1.34, obtém-se:

$$\dot{X} = [A - B K_r] X \quad (1.36)$$

Em termos do índice de desempenho dado na equação 1.33, a equação tomará o seguinte aspecto:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t [X^T Q X + (-K_r X)^T Z (-K_r X)] dt = \frac{1}{2} \int_0^t X^T [Q + K_r^T Z K_r] X dt \quad (1.37)$$

Pode-se facilmente concluir que o índice de desempenho, aqui formulado, agrupa três importantes características que são básicas na pesquisa para a obtenção de uma matriz de realimentação de estado, a lei de transferência de um estado inicial para um estado final, as energias externas aplicadas ao sistema que garantem essa transferência e o período de tempo em que são processados os eventos. O sistema deverá ser estável nesse período.

Para o presente problema, a função do hamiltoniano conterá as variáveis independentes x_i que serão as próprias variáveis de estado do sistema além de contar com as variáveis p_i de ponderação, para $i=1,2,3, \dots, n$; onde n é a ordem máxima do sistema. De maneira compacta, o hamiltoniano terá a seguinte forma:

$$H = H(x_i, u_k, \dot{x}_i) \quad (1.38)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$
 $k = 1, 2, 3, \dots, m$

Os textos clássicos, referências [1], [3] e [4] sugerem que o hamiltoniano, considerando o conjunto de equações na forma canônica de variáveis de estado, tenha a seguinte formulação:

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T Z U + P^T \dot{X} = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T Z U + P^T [A X + B U] \quad (1.39)$$

Considerando o princípio de Hamilton, conforme descrito pelas equações 1.29 e 1.30, é possível, tendo em vista a equação 1.39, a obtenção das seguintes expressões:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} P^T [AX + BU] = AX + BU = \dot{X} \quad (1.40)$$

e

$$-\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2} X^T Q X \right] - \frac{\partial}{\partial X} [P^T A X] = \dot{P} \quad (1.41)$$

Será possível, também, a utilização de uma terceira equação diferencial envolvendo as variáveis de entrada.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{2} U^T Z U \right] + \frac{\partial}{\partial U} [P^T B U] = 0 \quad (1.42)$$

Pelo estudo em que se procura a definição de um índice de desempenho mais realista possível, como aquele fornecido pela equação 1.33, a introdução dos critérios de estabilidade de sistemas de controle segundo *Lyapunov*, se faz necessária e sua aplicação pode ser explicada a seguir. Ver referências [1] e [6].

Derivando a equação 1.33, relativa ao índice de desempenho, no domínio do tempo, tem-se que:

$$\dot{V}(X) = \frac{1}{2} [X^T Q X + U^T Z U] \quad (1.43)$$

Com a inclusão dos efeitos das próprias variáveis de estado no cômputo do cálculo variacional é possível escrever a função matricial F dando a seguinte relação:

$$F = \dot{V}(X) + P^T \dot{X} \quad (1.44)$$

Comparando as equações 1.39 e 1.44, observa-se que a função F nada mais é que o hamiltoniano onde $F=H$.

Convém lembrar que a função hamiltoniano de um sistema dinâmico está associada ao balanço entre as energias cinética e potencial e que dentro do escopo da teoria de controle, no plano de estado, representa o balanço geral da energia intrínseca desse sistema.

A utilização de um índice de desempenho na forma do hamiltoniano visa trabalhar com a ideia de controle sob a óptica de níveis mínimos de energia. Nesse sentido, essa ideia também evidencia a questão da operação estável.

A equação 1.42 permite que se promova o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{2} U^T Z U \right] + \frac{\partial}{\partial U} [P^T B U] = U^T Z + P^T B = 0 \quad (1.45)$$

$$(U^T Z)^T + (P^T B)^T = 0 \quad \therefore Z^T U = -B^T P \quad \therefore U = -Z^{-1} B^T P$$

onde adota-se $Z^{-1} = Z$

Comumente na literatura de controle automático, a matriz P é uma matriz simétrica que varia no domínio do tempo contendo a seguinte forma:

$$P = K X \quad (1.46)$$

Deste modo, o vetor de variáveis de entrada da equação 1.45 tomará o seguinte aspecto:

$$U = -Z^{-1} B^T K X \quad \therefore U = \Gamma X \quad (1.47)$$

onde $\Gamma = -Z^{-1} B^T K$

Derivando a equação 1.46 em relação ao tempo, e já considerando a matriz K uma matriz de elementos constantes, o que é mais comum, tem-se:

$$\dot{P} = K \dot{X} \quad (1.48)$$

Promovendo o devido desenvolvimento da equação 1.41 anterior, tem-se a seguinte expressão:

$$-X^T Q - P^T A - \dot{P} = 0 \quad \therefore (X^T Q)^T + (P^T A)^T + (\dot{P})^T = 0$$

Levando-se em conta a condição de que $(\dot{P})^T = \dot{P}$, e que a matriz Q é simétrica, para a equação anterior vem que:

$$(X^T Q)^T + (P^T A)^T + \dot{P} = 0 \quad \therefore Q^T X + A^T P + \dot{P} = 0$$

logo

$$Q^T X + A^T P + \dot{P} = Q X + A^T P + K \dot{X} = 0$$

ou melhor

$$Q X + A^T P + K \dot{X} = Q X + A^T P + K [A X + B U] = 0$$

ou então

$$K A X + K B U + Q X + A^T P = 0 \quad (1.49)$$

Trazendo-se na equação 1.49 o vetor das variáveis U da equação 1.47, finalmente obtém-se a conhecida *equação de Riccati* que permite a consecução da matriz de realimentação K do sistema sob a perspectiva do controle ótimo. Assim sendo, tem-se que:

$$K A X + A^T K X + Q X - K B Z^{-1} B^T K X = 0$$

finalmente

$$K A + A^T K + Q - K B Z^{-1} B^T K = 0 \quad (1.50)$$

Para o caso em que a matriz K seja composta por funções dependentes do tempo, genericamente, ter-se-ia que:

$$\dot{K} + K A + A^T K + Q - K B Z^{-1} B^T K = 0 \quad (1.51)$$

Como observação, vale lembrar que a solução das equações 1.50 e 1.51 deverá ser obtida por intermédio de recursos computacionais, pois não se trata de operação analítica.

1.5. Abordagem Discreta

Assim como foi visto anteriormente dentro do campo da matemática contínua, o processo de discretização ou discreto também admite que se utilize da forma canônica de variáveis de estado, apenas que agora a abordagem é adaptada aos processos onde o controle é promovido por computador. As variáveis agora se tornam números para serem processados através de fórmulas puramente matemáticas ao invés de grandezas físicas tangíveis. A forma discreta da equação 1.34 pode ser assim descrita então:

$$X(k\tau+1) = F(k\tau)X(k\tau) + G(k\tau)U(k\tau) \quad (1.52)$$

com $k = 1, 2, 3, \dots, n$

onde τ é o passo de integração adotado no processo de discretização. Ver referência [4], [5] e [8].

O índice de desempenho aqui proposto tem semelhança com o índice formulado para o caso em que o modelo estava no plano da matemática contínua e pode ser assim descrito:

$$IP = \sum_{k=0}^n H(k) \quad (1.53)$$

Assim, através do processo de minimização do índice de desempenho discreto dado pela equação 1.53, é possível implementar a ação de otimização operativa para o sistema contínuo que foi discretizado.

As formulações que reúnem as condições básicas a serem obedecidas para que sejam garantidos os objetivos de minimização do índice de desempenho devem seguir as equações matriciais seguintes, bem semelhantes àquelas que foram adotadas para a análise no plano contínuo.

Seguindo o princípio de Hamilton, tem-se que:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial P} = 0 = F X(k) + G U(k) - X(k+1) \quad (1.54)$$

e

$$\frac{\partial H(k)}{\partial X} = P(k) = Q X(k) + F^T P(k+1) \quad (1.55)$$

Será possível, também, a utilização de uma terceira equação diferencial envolvendo as variáveis de entrada.

$$\frac{\partial H(k)}{\partial U} = 0 = Z U(k) + G^T P(k+1) \quad (1.56)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

A ideia de utilização dos índices ditados pelas equações 1.54, 1.55 e 1.56, ligeiramente modificados em relação àqueles propostos nas equações 1.40, 1.41 e 1.42 na abordagem contínua, não foge muito da ideia de minimização. Ver referências [1] e [4].

As seguintes relações podem ser explicitadas a partir daqui:

$$X(k+1) = F X(k) + G U(k) \quad (1.57)$$

e

$$P(k) = Q X(k) + F^T P(k+1) \quad (1.58)$$

e também

$$U(k) = -Z^{-1} G^T P(k+1) \quad (1.59)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Substituindo a expressão de $U(k)$ da equação 1.59 na equação 1.57 vem que:

$$X(k+1) = F X(k) - G Z^{-1} G^T P(k+1) \quad (1.60)$$

A matriz P , também conhecida como *multiplicador de Lagrange*, tem uma relação com o vetor das variáveis de estado do sistema numa relação semelhante à relação da equação 1.46 quando da abordagem contínua do problema. Assim, pode-se escrever numa abordagem discreta que:

$$P(k) = K(k) X(k) \quad (1.61)$$

Igualando as relações das equações 1.58 e 1.61 obtém-se que:

$$K(k) X(k) = Q X(k) + F^T P(k+1) = Q X(k) + F^T K(k+1) X(k+1) \quad (1.62)$$

Da equação 1.60 obtém-se que:

$$X(k+1) = F X(k) - G Z^{-1} G^T K(k+1) X(k+1) \quad (1.63)$$

Da equação 1.63, anterior, isola-se a expressão para a matriz $X(k+1)$. Assim, tem-se que:

$$X(k+1) = [I + GZ^{-1}G^T K(k+1)]^{-1} F X(k) \quad (1.64)$$

onde I é a matriz identidade

Levando-se a expressão de $X(k+1)$ da equação 1.64 na equação 1.62 vem que:

$$K(k)X(k) = QX(k) + F^T K(k+1)[I + GZ^{-1}G^T K(k+1)]^{-1} F X(k)$$

Eliminando-se o vetor variáveis de estado X entre os membros da equação precedente vem:

$$K(k) = Q + F^T K(k+1)[I + GZ^{-1}G^T K(k+1)]^{-1} F \quad (1.65)$$

A equação 1.65 é a *equação de Riccati* em sua forma discreta que realmente contém a relação iterativa possibilitando, através de uma implementação computacional, que se obtenha a matriz K .

De posse da matriz K , através de um simples procedimento matemático, obtém-se a matriz $P(k+1)$ que, levada na equação 1.59, fornecerá a matriz das variáveis de realimentação da equação $U(k)$.

Da equação 1.58 extrai-se a expressão da matriz $P(k+1)$ da seguinte maneira:

$$P(k+1) = [F^T]^{-1} [P(k) - QX(k)] \quad (1.66)$$

Levando-se a expressão de $P(k+1)$ da equação 1.66 na equação 1.59 vem que:

$$U(k) = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [P(k) - QX(k)]$$

Levando, agora, na equação anterior, a expressão de $P(k)$ da equação 1.61, obtém se:

$$U(k) = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [K(k)X(k) - QX(k)] = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [K(k) - Q] X(k) = \Gamma X(k) \quad (1.67)$$

A equação 1.67 reúne, a partir da determinação da matriz de realimentação Γ , os elementos que garantem o controle ótimo via realimentação de estado.

Para voltar ao plano contínuo bastará utilizar a fórmula seguinte:

$$\Gamma(t) = \Gamma(k) \quad (1.68)$$

1.6. Considerações Finais

O procedimento iterativo utilizado para a computação digital da matriz K da equação de Riccati terá seu sucesso garantido a partir do momento em que houver convergência dos valores sempre a partir de condições iniciais favoráveis.

Algumas observações se fazem necessárias:

- a) Durante o processo de cálculo da matriz da planta no plano discreto, matriz F , deve-se assegurar que o passo de integração adotado seja no máximo 10% inferior a menor constante de tempo envolvida no processo.
- b) Cuidados especiais deverão ser tomados com subsistemas com laços de realimentação.
- c) A condição de estabilidade aqui adotada consiste em considerar, a partir do prévio conhecimento das equações físicas na forma canônica de variáveis de estado, que um determinado sistema somente será declarado estável se, e somente se, todos os seus autovalores associados à matriz da planta do modelo contínuo não apresentarem partes reais positivas.
- d) A matriz de ponderação relativa às variáveis de entrada, matriz Z no plano discreto, se tomada como diagonal unitária será suficiente para o bom desenvolvimento do processo computacional.
- e) A matriz Q de ponderação relativa às variáveis de estado tem importância capital no desempenho do processo. Devem-se testar várias matrizes a começar por uma matriz diagonal, porém escolher e testar os valores antes.
- f) A matriz K obtida a partir da resolução da equação de Riccati será sempre simétrica desde que a matriz de ponderação Q o seja.

g) Partir sempre da condição em que a matriz Q de ponderação seja uma matriz definida positiva, no mínimo semi-definida positiva.

1.7. Referências

- [1] L. R. Gomes, "Aplicação da Teoria do Controle Ótimo Via Realimentação de Estado aos Sistemas de Regulação e Controle", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Brasil, 1987.
- [2] J. Feinstein, "Teoria dos Sistemas de Controle Enfoque por Variáveis de Estado", Editora Campus Ltda, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Brasil, 1979.
- [3] K. Ogata, "State Space Analysis of Control Systems", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.J., USA, 1967.
- [4] J. A. Cadzow, H. R. Martens, "Discrete-Time and Computer Control Systems", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.J., USA, 1970.
- [5] J. M. Smith, "Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists", A Wiley-Interscience Publication, New York, USA, 1977.
- [6] M. A. Pai, "Power System Stability – Analysis by Direct Method of Lyapunov", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1981.
- [7] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis, "Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares", Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- [8] V. Shaked, "Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear Quadratic Optimal Regulator", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol AC 31, nº. 2, February of 1986.
- [9]] L. R. Gomes – C. H. F. da Silva. Máquina Síncrona Modelada em Espaço de Estado: Um Caso Real, Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 91, PP 58-65, Julho 2013.

CAPÍTULO 2 - REGULADOR DE VELOCIDADE POR CONTROLE MODERNO VIA EQUAÇÃO DE RICCATI

RESUMO – Este artigo tem por finalidade apresentar o desenvolvimento e a aplicação de um controle suplementar ao regulador de velocidade de uma turbina hidráulica por ação de um controlador do tipo discreto baseado em minimização de índices de desempenho com base no controle ótimo, uma técnica do controle moderno com a abordagem do problema por variáveis de estado. Será utilizado o método de realimentação de estado aplicado a uma situação de instabilidade sobre o controlador PID tradicional. O sistema de controle e o processo a ser utilizado pertencem a uma instalação real cujo modelo foi validado previamente através de ensaios de campo.

Palavras-Chave: Teoria de Controle Ótimo, Reguladores de Velocidade, Controle Moderno.

Lista das Principais Variáveis

X : vetor das variáveis de estado $[nx1]$
 U : vetor das variáveis de entrada $[mx1]$
 A : matriz das variáveis de estado da planta $[nxn]$
 B : matriz das variáveis de entrada da planta $[nxm]$
 F : correspondente da matriz A no plano discreto $[nxn]$
 G : correspondente da matriz B no plano discreto $[nxm]$
 Q : matriz de ponderação das variáveis $[nxn]$
 Z : matriz de ponderação das variáveis de entrada $[nxn]$
 Γ : matriz de realimentação de estado $[nx1]$
 n : ordem das variáveis de estado do sistema
 m : ordem das variáveis de entrada do sistema
 M : massa
 $\Delta P_m(S)$: variação da potência mecânica em pu
 $\Delta P_e(S)$: variação da potência mecânica em pu
 $\Delta \omega(S)$: variação da velocidade em pu
 $\Delta \delta(S)$: variação do ângulo elétrico de potência em radianos
 $\Delta Y(S)$: variação do curso do servomotor principal em pu
 $\Delta z(S)$: variação do *spool* da válvula piloto em pu
 $U(1)$: entrada externa de sinais de realimentação
 $X(1)$: variável de controle integrador em pu
 $X(2)$: curso da válvula piloto em pu
 $X(3)$: curso do servomotor principal em pu
 $X(4)$: variável associada à tubulação forçada em pu
 $X(5)$: velocidade ou frequência em pu
 $X(6)$: ângulo elétrico de potência em radianos
 bp : estatismo permanente em pu/pu
 T_d : constante de tempo do estatismo transitório em s
 T_D : constante de tempo de *washout* do regulador em s
 KLP : constante de proporcionalidade sem dimensão
 T_1 : constante de tempo associada à válvula proporcional em s
 T_y : constante de tempo do servomotor principal em s
 $Y_{m\acute{a}x}$: curso máximo do servomotor em pu
 $Y_{m\acute{i}n}$: curso mínimo do servomotor em pu

T_w : constante de inércia da água em s
 $2H$: constante de inércia do conjunto girante em s
 D : coeficiente de amortecimento da carga em pu/pu
 T : coeficiente de torque sincronizante em pu/radianos
 $C1$: comutador de realimentação de estado
 $C2$: comutador de rede *on-line* para rede *off-line*

2.1. Introdução

A técnica de controle ótimo aplicada a sistemas de controle automático é um método ligado ao controle moderno cuja base consiste no controle de sistemas pelo uso de uma ferramenta baseada na modelagem por variáveis de estado. A abordagem por variáveis de estado é focada no uso de um modelo estruturado na forma matricial.

Como em qualquer tratamento de análise de sistemas de controle automático, também aqui o importante é a operação estável fato que coloca o estudo da estabilidade como o ponto fundamental dessa abordagem.

Uma das características mais importantes na análise e solução do problema de instabilidade do sistema de controle é o uso da realimentação de estado guiado pela minimização dos índices de desempenho. O presente trabalho mostra a aplicação desse método ao modelo, já devidamente validado, de um sistema regulador de velocidade de uma turbina hidráulica da UHE Emborcação (4 x 298 MW) localizada no Triângulo Mineiro. Ver referência [1].

2.2. Revisão da Teoria Clássica

Qualquer estudo que se faça no campo da teoria de controle envolve com conceitos da teoria clássica da dinâmica de partículas e corpos rígidos. Para investigar a dinâmica de partículas ou mesmo de corpos rígidos é vantajoso especificar as posições do movimento dessas partículas no espaço por meio de variáveis independentes do que denotar tais posições através de coordenadas retangulares porque nem todas as coordenadas retangulares poderão ser independentes durante a análise. Quando isso acontece depara-se com um complicador.

O *princípio de Hamilton* é abstraído do *princípio de D'Alembert* que declara que a força aplicada a um sistema junto com a força de inércia a ele associada

formam um conjunto único em equilíbrio, desconsiderando aqui qualquer restrição.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.1)$$

A equação 2.1 é conhecida como a equação do *princípio de Hamilton* e determina que a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V de um sistema dinâmico é zero na condição de equilíbrio.

Definindo agora a variável L relativa ao lagrangeano em função do princípio de Hamilton tem-se que:

$$L = T - V \quad (2.2)$$

onde $L = L(\dot{q}_i, q_i)$

Deste modo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(\dot{q}_i, q_i) dt = 0 \quad (2.3)$$

Em termos de diferencial total, a partir da equação 2.3, é possível escrever que:

$$\delta L(\dot{q}_i, q_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.4)$$

Considerando, agora, que o sistema em questão tem n variáveis independentes, pela equação 2.3 vem que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt = 0 \quad (2.5)$$

Com isso, a equação 2.5 poderá ser reescrita tomando a seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \quad (2.6)$$

Sabe-se que para posições fixas das coordenadas gerais $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, nos tempos específicos t_1 e t_2 , as variações diferenciais δq_i são nulas. Porém, para

um caso arbitrário em que se possa ter $\delta q_i \neq 0$ então a seguinte relação deverá prevalecer:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.7)$$

A passagem da equação 2.6 para a equação 2.7 só foi possível quando se considerou L variando no domínio do tempo e que as variações das posições das novas coordenadas eram diferentes de zero. A equação 2.7 é conhecida como a equação de Lagrange para o movimento de partículas dentro do campo da dinâmica do ponto material.

2.3. Equações de Hamilton do Movimento

As funções de Lagrange podem ser reescritas a partir das equações de Hamilton que são dadas por:

$$H = T + V \quad (2.8)$$

Assim

$$L = T - V = 2T - H$$

A proposição agora é trabalhar não só com as variáveis q_i , mas também com as variáveis p_i . As variáveis p_i são assim definidas em função das variáveis $\dot{q}_i$.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3 + \dots + a_{1n} \dot{q}_n \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{21} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 + a_{23} \dot{q}_3 + \dots + a_{2n} \dot{q}_n \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = a_{31} \dot{q}_1 + a_{32} \dot{q}_2 + a_{33} \dot{q}_3 + \dots + a_{3n} \dot{q}_n \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = a_{n1} \dot{q}_1 + a_{n2} \dot{q}_2 + a_{n3} \dot{q}_3 + \dots + a_{nn} \dot{q}_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Com a mudança proposta, a energia em jogo será a energia cinética de T que representa a energia cinética de todo o sistema de n partículas. Lembrando que a energia cinética total, em função da posição de cada partícula de massa M do sistema, é dada pela seguinte relação:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (\dot{x}_i)^2 \quad (2.10)$$

É importante salientar que as variáveis em jogo nesse momento são aquelas variáveis linearmente independentes que constituem o sistema uma vez que não interessa trabalhar com as variáveis que são linearmente dependentes, pois elas não resolvem o problema. Aqui é possível associar a equação 2.10 com as variáveis independentes numa forma quadrática relacionada à energia cinética envolvida. Assim:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n [a_{ij} \dot{q}_j] \dot{q}_i \right] \right\} \therefore 2T = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n [a_{ij} \dot{q}_j] \dot{q}_i \right] \quad (2.11)$$

Portanto, com base na equação 2.9, obtém-se:

$$2T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (2.12)$$

Aplicando as equações 2.1 e 2.8 relativas ao princípio de Hamilton, a equação 012 poderá ser assim utilizada numa nova formulação, senão veja-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - H \right) dt \quad (2.13)$$

Substituindo na equação 2.13 as variáveis p_i dadas nas equações 2.9 obtém-se a seguinte expressão:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n [\delta(p_i \dot{q}_i) - \delta H] dt = 0 \quad (2.14)$$

Analisando, particularmente, o segundo membro da equação 2.14, uma análise mais depurada que pode ser vista na referência [3] conduz a seguinte relação:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \quad (2.15)$$

Quando são considerados valores arbitrários para as diferenciais δq_i e δp_i , tal que $\delta q_i \neq 0$ e $\delta p_i \neq 0$, as seguintes relações ficam evidenciadas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i=1,2,3, \dots, n \quad (2.16)$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1,2,3, \dots, n \quad (2.17)$$

As equações 2.16 e 2.17 são conhecidas como equações de Hamilton do movimento dinâmico para um sistema onde $H=T+V$, conforme equação 2.7.

Um sistema com um grau de liberdade k onde é possível estipular um conjunto com um espaço dimensional da ordem de $2k$, com as coordenadas gerais q_i e p_i , $i=1,2,3, \dots, n$, é chamado de espaço de fase.

As equações de Hamilton fornecem as componentes de velocidade de um determinado ponto do espaço de estado. Ficam, então, definidas as equações 2.16 e 2.17 como componentes de um conjunto de $2k$ equações diferenciais de primeira ordem na seguinte forma genérica:

$$\dot{q}_i = g_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k; p_1, p_2, p_3, \dots, p_k) \quad (2.18)$$

e

$$\dot{p}_i = h_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k; p_1, p_2, p_3, \dots, p_k) \quad (2.19)$$

$$i=1,2,3, \dots, k$$

Desde que essas $2k$ variáveis sejam a menor coleção de números que possam ser especificadas no sentido de descrever completamente a dinâmica de um determinado sistema essas variáveis são as variáveis de estado desse sistema.

2.4. Aplicação na Teoria de Controle

A teoria de controle moderno se utiliza dos chamados índices de desempenho para a efetivação de sua ação sobre a dinâmica dos sistemas em geral. Esses índices nada mais são que formas quadráticas em função da combinação das diversas variáveis de estado que compõem o sistema. Elas formam um

conjunto mínimo de equações que descrevem completamente a dinâmica do sistema em questão.

A aplicação do princípio de Hamilton da teoria clássica da dinâmica, assim como foi visto anteriormente, introduz o conceito de espaço de fase estendido ao conceito de espaço de estado com um forte apelo na formulação do conceito de controle ótimo com base em índices desempenho.

A diferença é que não só serão utilizadas as variáveis de estado, mas também as variáveis de entrada externa ao sistema.

Existem várias proposições de formulação dos índices de desempenho, também conhecidos como índices de *performance*.

Um exemplo bem usual é aquele que agrega as variáveis de estado e ao mesmo tempo as variáveis de entrada externa na forma mostrada a seguir, onde T denota matriz transposta:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t [X^T Q X + U^T Z U] dt \quad (2.20)$$

relativamente à equação de uma planta ou sistema de controle automático na conhecida forma canônica de variáveis de estado, representada em seguida.

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.21)$$

A técnica de realimentação de estado, um procedimento comum no processo de estabilização em sistemas de controle automático, pode ser equacionada dentro da forma padrão de variáveis de estado a partir da equação matricial da planta 2.21.

Para realimentação de estado tem-se que:

$$U = -K_r X \quad (2.22)$$

onde K_r é a matriz de realimentação de ordem $q \times n$.

Deste modo, considerando a equação 2.21, obtém-se:

$$\dot{X} = [A - BK_r] X \quad (2.23)$$

Em termos do índice de desempenho dado na equação 2.20, a equação tomará o seguinte aspecto:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t [X^T Q X + (-K_r X)^T Z (-K_r X)] dt = \frac{1}{2} \int_0^t X^T [Q + K_r^T Z K_r] X dt \quad (2.24)$$

Pode-se facilmente concluir que o índice de desempenho, aqui formulado, agrupa três importantes características que são básicas na pesquisa para a obtenção de uma matriz de realimentação de estado, a lei de transferência de um estado inicial para um estado final, as energias externas aplicadas ao sistema que garantem essa transferência e o período de tempo em que são processados os eventos. O sistema deverá ser estável nesse período.

Para o presente problema, a função do hamiltoniano conterá as variáveis independentes x_i que serão as próprias variáveis de estado do sistema além de contar com as variáveis p_i de ponderação, para $i=1,2,3, \dots, n$; onde n é a ordem máxima do sistema.

De maneira compacta, o hamiltoniano terá a seguinte forma:

$$H = H(x_i, u_k, \dot{x}_i) \quad (2.25)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$
 $k = 1, 2, 3, \dots, m$

Os textos clássicos, referências [1], [3] e [4] sugerem que o hamiltoniano, considerando o conjunto de equações na forma canônica de variáveis de estado, tenha a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T Z U + P^T \dot{X} = \\ &= \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T Z U + P^T [A X + B U] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considerando o princípio de Hamilton, conforme descrito pelas equações 2.16 e 2.17, é possível, tendo em vista a equação 2.26, a obtenção das seguintes expressões:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} P^T [A X + B U] = A X + B U = \dot{X} \quad (2.27)$$

e

$$-\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2} X^T Q X \right] - \frac{\partial}{\partial X} [P^T A X] = \dot{P} \quad (2.28)$$

Será possível, também, a utilização de uma terceira equação diferencial envolvendo as variáveis de entrada.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{2} U^T Z U \right] + \frac{\partial}{\partial U} [P^T B U] = 0 \quad (2.29)$$

Pelo estudo em que se procura a definição de um índice de desempenho mais realista possível, como aquele fornecido pela equação 2.20, a introdução dos critérios de estabilidade de sistemas de controle segundo *Lyapunov*, se faz necessária e sua aplicação pode ser explicada a seguir. Ver referências [1] e [6].

Derivando a equação 2.20, relativa ao índice de desempenho, no domínio do tempo, tem-se que:

$$\dot{V}(X) = \frac{1}{2} [X^T Q X + U^T Z U] \quad (2.30)$$

Com a inclusão dos efeitos das próprias variáveis de estado no cômputo do cálculo variacional é possível escrever a função matricial F dando a seguinte relação:

$$F = \dot{V}(X) + P^T \dot{X} \quad (2.31)$$

Comparando as equações 2.26 e 2.31, observa-se que a função F nada mais é que o hamiltoniano onde $F=H$.

Convém lembrar que a função hamiltoniano de um sistema dinâmico está associada ao balanço entre as energias cinética e potencial e que dentro do escopo da teoria de controle, no plano de estado, representa o balanço geral da energia intrínseca desse sistema.

A utilização de um índice de desempenho na forma do hamiltoniano visa trabalhar com a ideia de controle sob a óptica de níveis mínimos de energia. Nesse sentido, essa ideia também evidencia a questão da operação estável.

2.5. Abordagem Discreta

Assim como foi visto anteriormente dentro do campo da matemática contínua, o processo de discretização ou discreto também admite que se utilize da forma canônica de variáveis de estado, apenas que agora a abordagem é adaptada aos processos onde o controle é promovido por computador. As variáveis agora se tornam números para serem processados através de fórmulas puramente matemáticas ao invés de grandezas físicas tangíveis.

A forma discreta da equação 2.32 pode ser assim descrita então:

$$X(k\tau + 1) = F(k\tau)X(k\tau) + G(k\tau)U(k\tau) \quad (2.32)$$

com $k = 1, 2, 3, \dots, n$

onde τ é o passo de integração adotado no processo de discretização. Ver referência [4], [5] e [8].

O índice de desempenho aqui proposto tem semelhança com o índice formulado para o caso em que o modelo estava no plano da matemática contínua e pode ser assim descrito:

$$IP = \sum_{k=0}^n H(k) \quad (2.33)$$

Assim, através do processo de minimização do índice de desempenho discreto dado pela equação 2.33, é possível implementar a ação de otimização operativa para o sistema contínuo que foi discretizado.

As formulações que reúnem as condições básicas a serem obedecidas para que sejam garantidos os objetivos de minimização do índice de desempenho devem seguir as equações matriciais seguintes, bem semelhantes àquelas que foram adotadas para a análise no plano contínuo.

Seguindo o princípio de Hamilton, tem-se que:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial P} = 0 = F X(k) + G U(k) - X(k + 1) \quad (2.34)$$

e

$$\frac{\partial H(k)}{\partial X} = P(k) = Q X(k) + F^T P(k+1) \quad (2.35)$$

Será possível, também, a utilização de uma terceira equação diferencial envolvendo as variáveis de entrada.

$$\frac{\partial H(k)}{\partial U} = 0 = Z U(k) + G^T P(k+1) \quad (2.36)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

A ideia de utilização dos índices ditados pelas equações 2.34, 2.35 e 2.36, ligeiramente modificados em relação àqueles propostos nas equações 2.27, 2.28 e 2.29 na abordagem contínua, não foge muito da ideia de minimização. Ver referências [1] e [4].

As seguintes relações podem ser explicitadas a partir daqui:

$$X(k+1) = F X(k) + G U(k) \quad (2.37)$$

e

$$P(k) = Q X(k) + F^T P(k+1) \quad (2.38)$$

e também

$$U(k) = -Z^{-1} G^T P(k+1) \quad (2.39)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Substituindo a expressão de $U(k)$ da equação 2.39 na equação 2.37 vem que:

$$X(k+1) = F X(k) - G Z^{-1} G^T P(k+1) \quad (2.40)$$

A matriz P , também conhecida como *multiplicador de Lagrange*, tem uma relação com o vetor das variáveis de estado do sistema numa relação semelhante à relação da equação quando da abordagem contínua do problema. Assim, pode-se escrever numa abordagem discreta que:

$$P(k) = K(k) X(k) \quad (2.41)$$

Igualando as relações das equações 2.38 e 2.41 obtém-se que:

$$K(k)X(k) = QX(k) + F^T P(k+1) = QX(k) + F^T K(k+1)X(k+1) \quad (2.42)$$

Da equação 2.42 obtém-se que:

$$X(k+1) = F X(k) - G Z^{-1} G^T K(k+1) X(k+1) \quad (2.43)$$

Da equação 2.43, anterior, isola-se a expressão para a matriz $X(k+1)$. Assim, tem-se que:

$$X(k+1) = [I + G Z^{-1} G^T K(k+1)]^{-1} F X(k) \quad (2.44)$$

onde I é a matriz identidade

Levando-se a expressão de $X(k+1)$ da equação 2.44 na equação 2.42 vem que:

$$K(k)X(k) = QX(k) + F^T K(k+1)[I + G Z^{-1} G^T K(k+1)]^{-1} F X(k)$$

Eliminando-se o vetor variáveis de estado X entre os membros da equação precedente vem:

$$K(k) = Q + F^T K(k+1)[I + G Z^{-1} G^T K(k+1)]^{-1} F \quad (2.45)$$

A equação 2.45 é a *equação de Riccati* em sua forma discreta que realmente contém a relação iterativa possibilitando, através de uma implementação computacional, que se obtenha a matriz K .

De posse da matriz K , através de um simples procedimento matemático, obtém-se a matriz $P(k+1)$ que, levada na equação 2.39, fornecerá a matriz das variáveis de realimentação da equação $U(k)$.

Da equação 2.38 extrai-se a expressão da matriz $P(k+1)$ da seguinte maneira:

$$P(k+1) = [F^T]^{-1} [P(k) - QX(k)] \quad (2.46)$$

Levando-se a expressão de $P(k+1)$ da equação 2.46 na equação 2.39 vem que:

$$U(k) = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [P(k) - Q X(k)]$$

Levando, agora, na equação anterior, a expressão de $P(k)$ da equação 2.41, obtém-se:

$$U(k) = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [K(k) X(k) - Q X(k)] = -Z^{-1}G^T [F^T]^{-1} [K(k) - Q] X(k) = \Gamma X(k) \quad (2.47)$$

A equação 2.47 reúne, a partir da determinação da matriz de realimentação Γ , os elementos que garantem o controle ótimo via realimentação de estado.

Para voltar ao plano contínuo bastará utilizar a fórmula seguinte:

$$\Gamma(t) = \Gamma(k) \quad (2.48)$$

2.6. Exemplo Prático

O exemplo aqui apresentado se refere ao sistema de regulação de velocidade da UHE Emborcação (4 x 298 MW) localizada no Triângulo Mineiro. A figura 2.1 mostra o diagrama em blocos no plano de Laplace do sistema de regulação de velocidade.

Os resultados podem ser vistos nas tabelas de 2.1 a 2.10 que mostram uma situação em que o sistema de regulação de velocidade passou por uma instabilidade e depois com a estabilização. Isso pode ser visto e confirmado pela presença de autovalores com partes reais positivas. Ver tabela 2.8. Logo após, nas mesmas condições de instabilidade, foi aplicado o procedimento com a minimização de índices de desempenho com a aplicação da técnica de realimentação de estado, via equação de Riccati.

Valores em Por Unidade da Figura 2.1

Potência Base = 284 MW

Frequência Elétrica Base = 377 rad/s

bp = 0,05 pu/pu

Td = 5,2 s

TD = 52 s

KLP = 4,1 sem dimensão

T1 = 0,685 s

Ty = 0,2 s

Ymáx = +1,00 pu

Ymín = -1,00 pu

$T_w = 1,55 \text{ s}$

$2H = 10,43 \text{ s}$

$D = 0,5 \text{ pu/pu}$

$T = 0,01 \text{ pu/rad}$ em rede isolada ou off-line

$T = 3,1 \text{ pu/rad}$ em rede interligada ou on-line

$C1$: comutação em 60 s

$C2$: comutação em 50 s

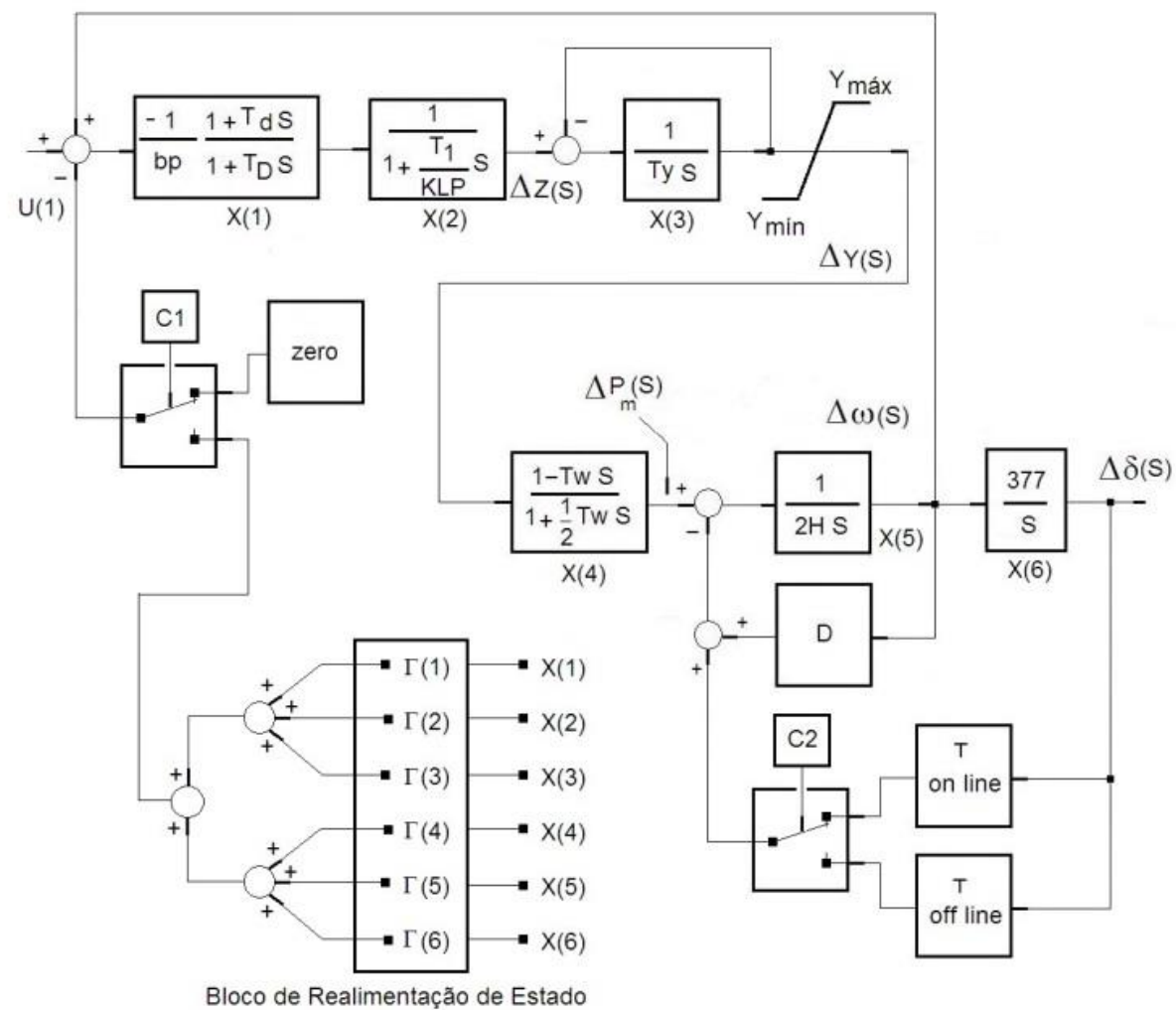


Figura 2.1 - Sistema Regulador de Velocidade

Observar na tabela 2.10 de autovalores que o sistema, dentro das ponderações adotadas, tornou-se estável. As figuras 2.2 e 2.3 mostram as respostas do sistema para as duas condições. No instante 50s houve a comutação entre as operações *on-line* para *off-line* na rede de transmissão. Para efeito de impacto, no instante 20 s houve uma variação de 0,05 pu de carga. Na figura 2.3, a entrada do controlador via realimentação de estado se deu no instante 110 s.

Tabela 2.1 - Matriz "F" Discretizada

0.9977	0.0000	0.0000	0.0000	0.0418	0.0000
-0.2702	0.7295	-0.0005	0.0003	0.5349	0.0000
-0.0070	0.0418	0.9512	0.0000	0.0139	0.0000
-0.0001	0.0009	0.0375	0.9872	0.0002	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0019	0.0010	0.9995	0.0000
0.0000	-0.0001	-0.0035	0.0018	3.7691	1.0000

Tabela 2.2 - Matriz "G" Discretizada

0.0418
-0.3945
-0.0102
-0.0001
0.0000
0.0000

Tabela 2.3 - Matriz "K" De Riccati

6.7787	-0.3736	-2.4090	-8.9119	-108.0920	0.1410
-0.3736	0.0489	0.3090	1.8252	26.6118	-0.0174
-2.4090	0.3090	2.0467	12.3740	181.5715	-0.1149
-8.9118	1.8252	12.3740	181.0163	3188.3181	1.8181
-108.0903	26.6115	181.5700	3188.3149	57324.2734	40.4868
0.1410	-0.0174	-0.1149	1.8181	40.4862	0.0984

Tabela 2.4 - Matriz "Γ" de Realimentação

0.4502	-0.0370	-0.2378	-1.1787	-16.2569	0.0136
--------	---------	---------	---------	----------	--------

Tabela 2.5 - Matriz "Q" De Entrada					
0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010

Tabela 2.6 - Matriz "A" Continua Original					
-0.2320	0.0000	0.0000	0.0000	4.1860	0.0000
-31.5380	-31.5380	0.0000	0.0000	63.0770	0.0000
0.0000	5.0000	-5.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	3.8700	-1.2900	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.1917	0.0958	-0.0479	-0.0010
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	377.0000	0.0000

Tabela 2.7 - Matriz "B" Continua Original					
4.1860					
-45.3038					
0.0000					
0.0000					
0.0000					
0.0000					

Tabela 2.8 - Autovalores Do Sistema Original			
REAL=	-31.6196	IMAGINARIO=	0.0000
REAL=	-3.3840	IMAGINARIO=	0.8184
REAL=	-3.3840	IMAGINARIO=	-0.8184
REAL=	0.1910	IMAGINARIO=	0.6458
REAL=	0.1910	IMAGINARIO=	-0.6458
REAL=	-0.1024	IMAGINARIO=	0.0000

Tabela 2.9 - Nova Matriz "A "					
-2.1167	0.1547	0.9954	4.9338	72.2372	-0.0571
-11.1406	-33.2127	-10.7730	-53.3974	-673.4207	0.6174
0.0000	5.0000	-5.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	3.8700	-1.2900	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.1917	0.0958	-0.0479	-0.0010
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	377.0000	0.0000

Tabela 2.10- Autovalores do Sistema com Realimentação			
REAL=	-31.6454	IMAGINARIO=	0.0000
REAL=	-3.4230	IMAGINARIO=	0.7150
REAL=	-3.4230	IMAGINARIO=	-0.7150
REAL=	-1.2709	IMAGINARIO=	1.6084
REAL=	-1.2709	IMAGINARIO=	-1.6084
REAL=	-0.6340	IMAGINARIO=	0.0000

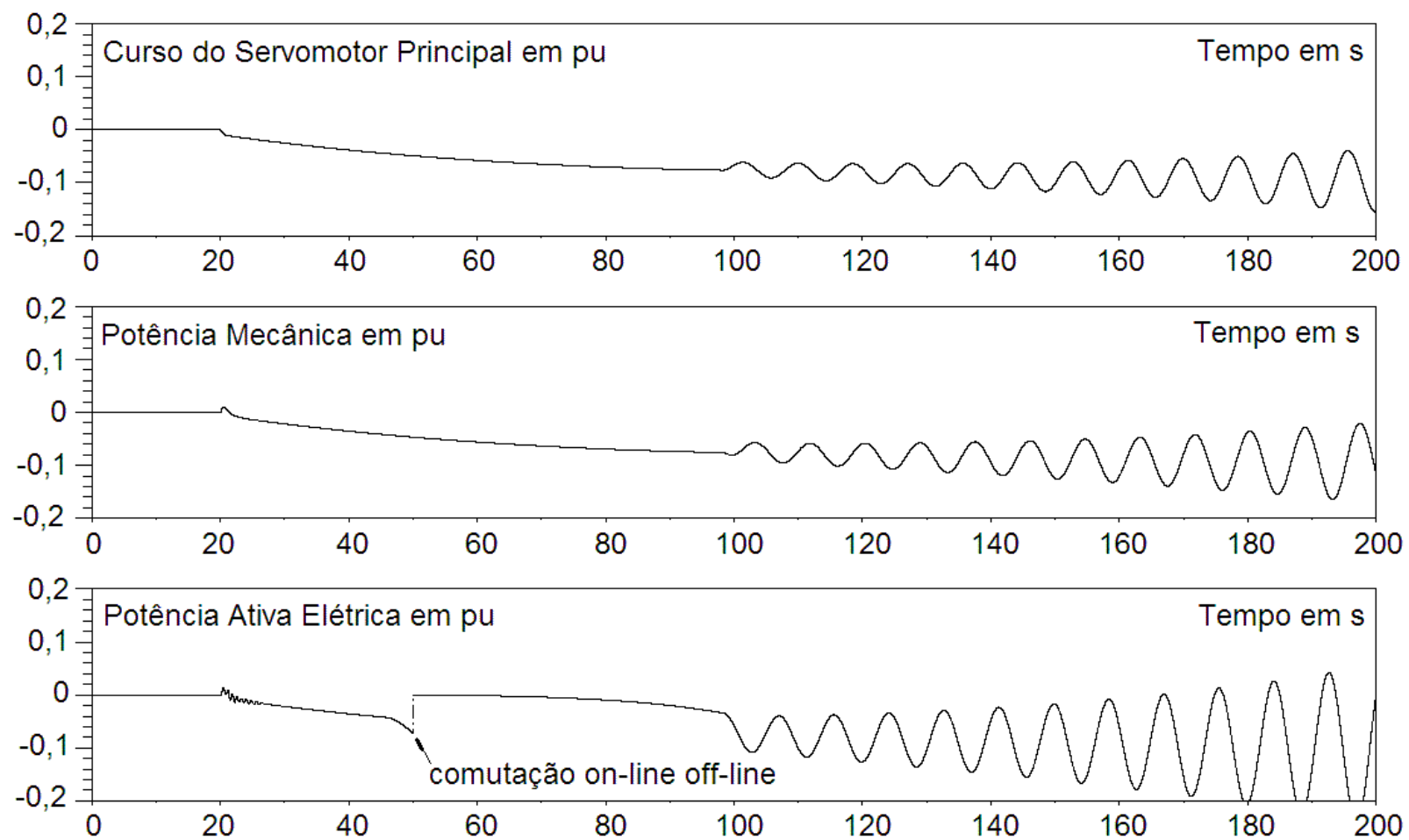


Figura 2.2 - Sistema sem Realimentação de Estado

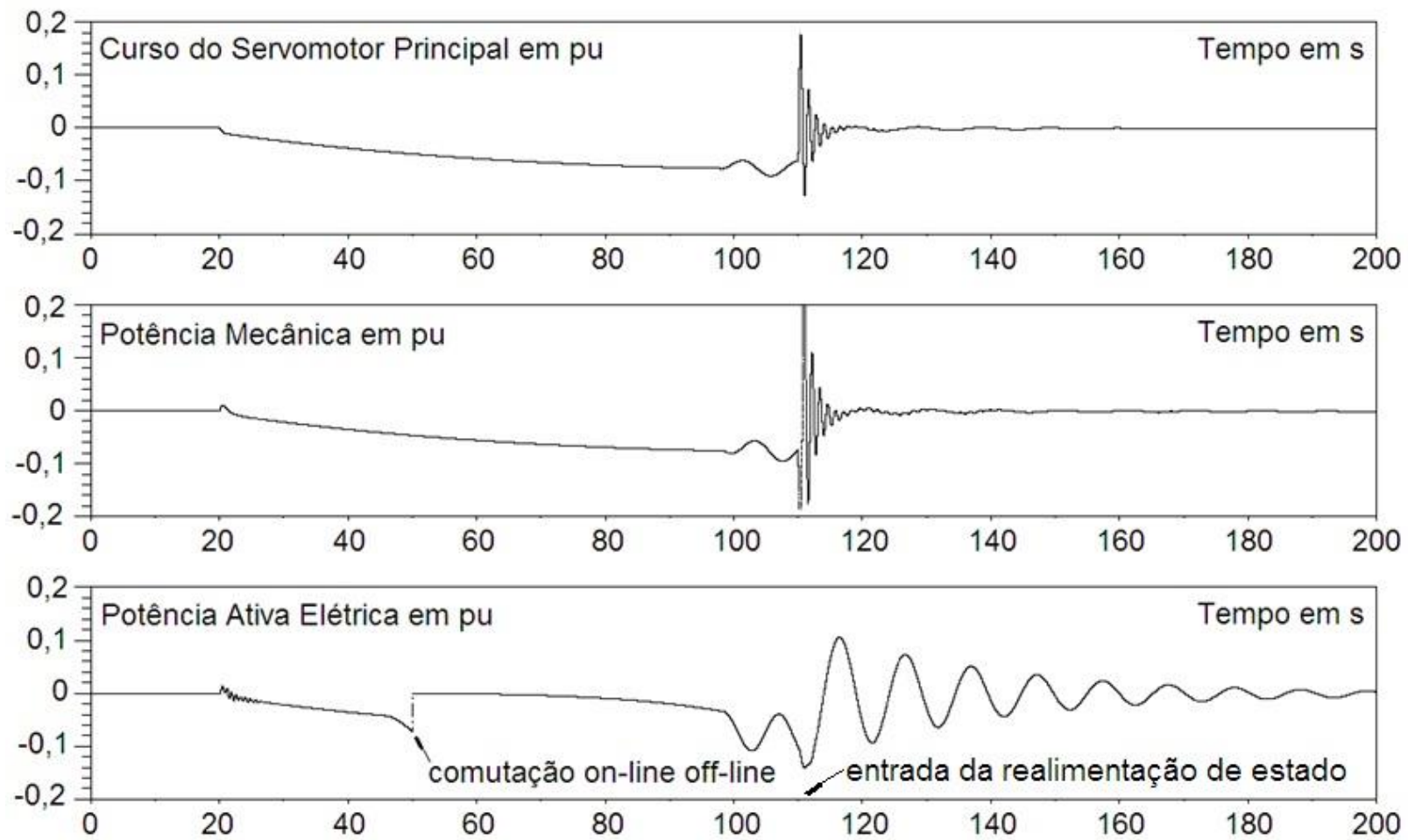


Figura 2.3 - Sistema com Realimentação de Estado

O procedimento iterativo utilizado para a computação digital da matriz K da equação de Riccati teve seu sucesso garantido a partir do momento em que houve convergência dos valores sempre a partir de condições iniciais favoráveis. Algumas observações se fazem necessárias:

- a) Durante o processo de cálculo da matriz da planta no plano discreto, matriz F , deve-se assegurar que o passo de integração adotado seja no máximo 10% inferior a menor constante de tempo envolvida no processo.
- b) Cuidados especiais deverão ser tomados com subsistemas com laços de realimentação.
- c) A condição de estabilidade aqui adotada consiste em considerar, a partir do prévio conhecimento das equações físicas na forma canônica de variáveis de estado, que um determinado sistema somente será declarado estável se, e somente se, todos os seus autovalores associados à matriz da planta do modelo contínuo não apresentarem partes reais positivas.
- d) A matriz de ponderação relativa às variáveis de entrada, matriz Z no plano discreto, se tomada como diagonal unitária será suficiente para o bom desenvolvimento do processo computacional.
- e) A matriz Q de ponderação relativa às variáveis de estado tem importância capital no desempenho do processo. Devem-se testar várias matrizes a começar por uma matriz diagonal, porém escolher e testar os valores antes.
- f) A matriz K resultada a partir da solução da equação de Riccati será sempre simétrica desde que a matriz de ponderação Q o seja.
- g) Partir sempre da condição em que a matriz Q de ponderação seja uma matriz definida positiva, no mínimo semi-definida positiva.
- h) Por fim saber que a precisão do modelo é imprescindível ao bom desempenho dessa proposta de controle.

2.7. Considerações Finais

A técnica do controle ótimo por realimentação de estado apresenta algumas vantagens sobre outros tipos de sistemas quando se quer prover um sistema de controle da estabilidade operativa eficiente e de baixo custo. No caso apresentado houve uma ocorrência em que os disjuntores de 500 kV, referente à condição de operação *on-line* do sistema, abriram todos ficando a UHE Emborcação alimentando apenas o sistema regional de 138 kV o que ocasionou instabilidade e, por conseguinte, o desligamento da unidade gerando um tipo de *shortage*. Essa ocorrência foi retratada na simulação cujos resultados podem ser vistos nos gráficos das figuras 2.2 e 2.3. Percebe-se que em 1 min, com a entrada do controlador por realimentação de estado, o sistema tornou-se estável. A vantagem da instalação do controlador por realimentação de estado é que ele pode ser ajustado antecipadamente e mantido ligado ao sistema regulador de velocidade com a sua entrada em funcionamento controlada externamente por dispositivos tais como o de monitoramento do estado atual dos disjuntores de 500 kV, no caso. Há situações em que o monitoramento poderá ser desenvolvido em função de uma unidade de proteção direcional de supervisão da direção do fluxo de potência ativa elétrica em uma determinada linha de transmissão, por exemplo.

A implementação de um dispositivo do tipo controlador por realimentação de estado, utilizando-se da tecnologia da eletrônica digital, é mais apropriada ainda em função de sua efetivação no campo uma vez que por ação da modelagem numérica é possível o acesso a todas as variáveis de estado envolvidas no processo. Outra facilidade a ser introduzida seria o processo de ajuste no campo o que exigiria apenas ação sobre potenciômetros quer sejam estes analógicos ou digitais.

Em algumas instalações elétricas, quando há perda da condição de operação *on-line*, o que pode ser caracterizado pelo desligamento dos disjuntores de 500 kV, por exemplo, já existem instalados sistemas suplementares conhecidos como SAGE, ou subsistema de alívio de geração, cuja função é reduzir, durante tais ocorrências, a geração das máquinas uma vez que não se dispõe de carga suficiente *versus* a geração despachada antes da ocorrência. Nesses

casos, como há uma redução brusca no valor do torque sincronizante, mesmo com ajustes para rede isolada, é possível que o regulador de velocidade não consiga manter as máquinas interligadas. Esse foi o caso mostrado na simulação apresentada nesse artigo.

2.8. Referências

- [1] L. R. Gomes, "Aplicação da Teoria do Controle Ótimo Via Realimentação de Estado aos Sistemas de Regulação e Controle", Dissertação de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Brasil, 1987.
- [2] J. Feinstein, "Teoria dos Sistemas de Controle Enfoque por Variáveis de Estado", Editora Campus Ltda, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Brasil, 1979.
- [3] K. Ogata, "State Space Analysis of Control Systems", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.J., USA, 1967.
- [4] J. A. Cadzow, H. R. Martens, "Discrete-Time and Computer Control Systems", Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.J., USA, 1970.
- [5] J. M. Smith, "Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists", A Wiley-Interscience Publication, New York, USA, 1977.
- [6] M. A. Pai, "Power System Stability – Analysis by Direct Method of Lyapunov", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1981.
- [7] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis, "Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares", Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- [8] V. Shaked, "Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear Quadratic Optimal Regulator", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol AC 31, nº. 2, February of 1986.
- [9]] L. R. Gomes – C. H. F. da Silva. Máquina Síncrona Modelada em Espaço de Estado: Um Caso Real, Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 91, PP 58-65, Julho 2013.

CAPÍTULO 3 - FENÔMENO DE AUTOEXCITAÇÃO EM GERADORES DE ENERGIA ELÉTRICA

RESUMO: O fenômeno de autoexcitação em máquinas síncronas tem por razão os efeitos de ressonância elétrica aos quais estes equipamentos ficam sujeitos em função da presença de cargas indutivas associadas a cargas capacitivas. O resultado deste fenômeno pode ser acompanhado de fortes sobretensões tanto no campo quanto no estator da máquina. Esse fenômeno também pode ser agravado durante as oscilações no sistema interligado uma vez que o processo de ressonância tem a ver com a frequência elétrica envolvida. Este artigo tem por objetivo apresentar uma análise sucinta do ponto de vista analítico para, posteriormente, calcular a faixa de risco operativo considerando o fenômeno da autoexcitação. Serão utilizadas as chamadas transformações ortogonais de Park, também conhecidas como transformações de Blondel [2], seu primeiro idealizador. Na realidade a transformação a ser utilizada será uma variante daquela que foi sugerida por Anderson [1].

Palavras-chave: Máquina síncrona, regulação de tensão, sistema de excitação.

3.1. Explicação Geral Acerca de Máquinas Síncronas

Ao se iniciar o estudo relativo à máquina síncrona, pode-se apresentar de início uma comparação direta entre as máquinas síncronas e outras máquinas rotativas.

Com relação às máquinas assíncronas ou máquinas de indução, outro tipo físico de máquina elétrica, pode-se afirmar que:

- a) as máquinas síncronas, quando operam como gerador, fornecem, ao mesmo tempo, potência ativa e potência reativa, já o gerador assíncrono fornece apenas potência ativa, continuando como no motor assíncrono, a consumir potência reativa;
- b) um gerador assíncrono consome em média, por característica, uma potência externa de aproximadamente 40% de sua potência nominal no processo de excitação o que inviabilizaria sua utilização já que o processo de excitação de um gerador síncrono exige apenas uma potência da ordem de 1% para menos de sua potência nominal.

A máquina síncrona pode ser representada, esquematicamente, pela figura 3.1.

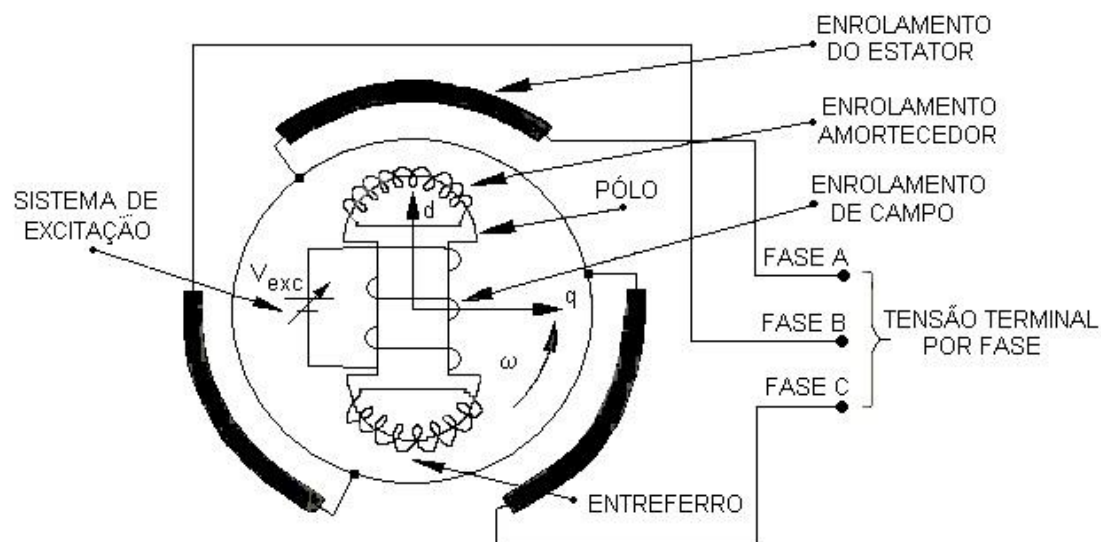


Figura 3.1 – Esquema Básico de uma Máquina Síncrona com um Par de Pólos e Ligação do Estator em Estrela

Pode-se notar pela figura 3.1 que existem dois eixos, um na direção do pólo e outro em quadratura com este. O eixo na direção do pólo é chamado de eixo direto ou apenas d , enquanto o outro é chamado de eixo em quadratura ou apenas q . Apenas lembrando que nesse caso, por questões didáticas, o estator se refere à parte fixa da máquina e o rotor à parte que se move com velocidade ω em relação ao estator. Observar que este sistema de eixos d - q , idealizado, gira na mesma rotação do rotor, ou seja, com velocidade ω .

Como o torque mecânico é transferido através da rotação do rotor via eixo de acoplamento rotor/fonte de energia primária, quando em gerador síncrono, ou via eixo de acoplamento rotor/carga mecânica, quando em motor síncrono, existe um sincronismo entre o campo magnético de excitação e o torque mecânico que é desenvolvido neste eixo de acoplamento, ou seja, ambos deverão girar na mesma velocidade, portanto sincronizados em regime permanente. Esta é a razão da máquina se chamar máquina síncrona.

Nota-se, também, que o sistema de eixos d - q gira sincronizado na frequência de rotação do conjunto girante uma vez que se trata de eixos fictícios idealizados sobre o rotor da máquina. A idealização desse sistema de eixos vem ligada às facilidades de análise quando todas as grandezas, mesmo aquelas localizadas no estator, são referidas ao rotor, portanto aos eixos d - q .

Estas transformações são clássicas no estudo da máquina síncrona e são conhecidas como transformações de Blondel, primeiro estudioso que as idealizou. Logo após, Park, Doherty, Nickle, entre outros estudiosos, apresentaram trabalhos nesta área. Nesse livro essas transformações serão chamadas apenas de transformações d-q-0.

O estudo da máquina síncrona, considerando-se as transformações de Blondel, será então desenvolvido de maneira fundamentada uma vez que sem esse conceito é difícil compreender perfeitamente o processo de regulação de tensão da máquina síncrona.

3.1.1. Enrolamento de Campo

O enrolamento de campo que envolve cada pólo cumpre o papel de, a partir de uma fonte de corrente contínua, que pode ser externa ou auto-alimentada, produzir o campo magnético indutor responsável pela excitação da máquina síncrona.

Em uma máquina síncrona com um par de pólos, por exemplo, nota-se que o fluxo magnético gerado em um dos lados do eixo polar é norte enquanto que do lado oposto o fluxo magnético gerado é sul. Em outras palavras, trata-se de um grande eletroímã. O enrolamento em si é constituído por espiras na forma de barras de cobre eletrolítico numa disposição retangular que envolve cada pólo de modo concentrado.

3.1.2. Estator

O estator da máquina síncrona, na sua forma padrão, constitui a parte estática que é varrida pelo fluxo magnético contínuo gerado no rotor. É formado pela carcaça, pelo núcleo magnético e pelos enrolamentos de fase da máquina.

O núcleo do estator, semelhantemente ao núcleo do rotor, é confeccionado de chapas de aço silicioso, ou seja, uma liga de aço com silício que apresenta alta permeabilidade magnética e baixas perdas, isoladas umas das outras e montadas segundo um alinhamento definido previamente através de pinos guia e presas por tirantes. O conjunto é chumbado na estrutura civil da instalação elétrica.

O enrolamento do estator é constituído de bobinas cujos condutores encontram-se alojados em ranhuras na sua parte interna. A estrutura final do anel magnético do estator termina em uma armação circular tendo na sua parte externa a carcaça e os trocadores de calor e em sua parte interna uma superfície dentada com as ranhuras que comportarão as bobinas. O estator da máquina síncrona também é conhecido como armadura da máquina.

3.1.3. Sistema de Excitação

Este sistema é responsável pela produção do fluxo magnético indutor a partir de uma fonte de corrente contínua podendo ser externa ou auto-alimentada que, no caso de grandes máquinas, se constitui de um controlador automatizado e que em pequenas máquinas pode ser composto de um sistema reostático controlado manualmente. Nas grandes instalações, esse sistema torna-se complexo e cumpre importantes ações que se refletem na própria estabilidade do sistema elétrico de potência, SEP.

A tensão de corrente contínua de alimentação é levada ao enrolamento de campo através de escovas que se encontram em contato permanente com os anéis coletores.

Além daquilo que foi descrito até aqui, é importante lembrar que as máquinas síncronas se diferem quanto à construção do rotor e, por conseguinte, do enrolamento de campo.

3.2. Equações da Máquina Síncrona

3.2.1. Geral

A máquina síncrona caracteriza o elemento representativo do processo sobre o qual vão atuar os órgãos de comando e controle para a obtenção do produto final, qual seja, a potência elétrica despachada a partir da potência motriz de entrada fornecida pela turbina.

Para o equacionamento da parte relativa à regulação de tensão, faz-se necessária a utilização da representação da máquina síncrona através de um equacionamento tal que venha a facilitar as análises e os estudos envolvidos.

O procedimento normal é a aplicação das chamadas transformações d-q-0 que busca a conversão de grandezas estatóricas em grandezas rotóricas através da transformação de grandezas estacionárias em grandezas pseudo-estacionárias referidas a um sistema de eixos fixado sobre o rotor e que gira na mesma velocidade deste, velocidade síncrona, fazendo com isto que estas grandezas independam da rotação.

O fato consiste na criação de três eixos chamados d-q-0, ou mais propriamente, eixo direto, eixo em quadratura e eixo zero, sendo que os eixos d e q perfazem entre si um ângulo de 90 graus elétricos e se movimentando na velocidade síncrona, sendo o eixo zero um eixo estacionário simplesmente utilizado nas representações em que as condições desequilibradas são verificadas.

O processo visa à projeção das grandezas dos eixos estatóricos, aqui designados por a-b-c, segundo uma matriz de transformação particular, sobre aqueles eixos d-q-0, do rotor, e a partir daí obter o equacionamento de toda a dinâmica da máquina síncrona.

Com o estabelecimento do equacionamento básico relativo às indutâncias, segundo as influências próprias e mútuas dos enrolamentos envolvidos, serão equacionadas as funções de transferência das partes implicadas buscando-se com isto a definição do modelo da máquina síncrona.

Em cima da modelagem e da análise, detalhadas previamente, será possível a realização de diagnósticos sobre o comportamento operativo da máquina síncrona sob determinadas condições.

3.2.2. A Transformação d-q-0

Como já foi citada anteriormente, a idéia da utilização da transformação de grandezas estacionárias em grandezas pseudo-estacionárias teve seu embasamento matemático formulado na utilização de uma matriz de transformação, um método específico de tratamento matemático para essa questão.

A transformação a ser aqui utilizada se trata da transformação específica proposta por W A Lewis, ver referência [8].

Primeiramente será representada uma máquina síncrona composta de um par de pólos conforme está mostrado na figura 3.1.

Os eixos d e q giram com a velocidade síncrona do conjunto no sentido horário. O eixo d encontra-se em fase com a direção do pólo enquanto o eixo q encontra-se em fase, na direção, 90 graus elétricos atrasados do eixo d, considerando o sentido de giro.

O diagrama fasorial para a máquina síncrona, anteriormente mostrado na figura 3.1, é apresentado na figura 3.2 considerando-se apenas a fase a do estator.

A equação básica da transformação d-q-0 é a seguinte:

$$G_{dq0} = P G_{abc} \quad (3.1)$$

onde

G: matriz das grandezas no sistema indicado;

P: matriz da transformação.

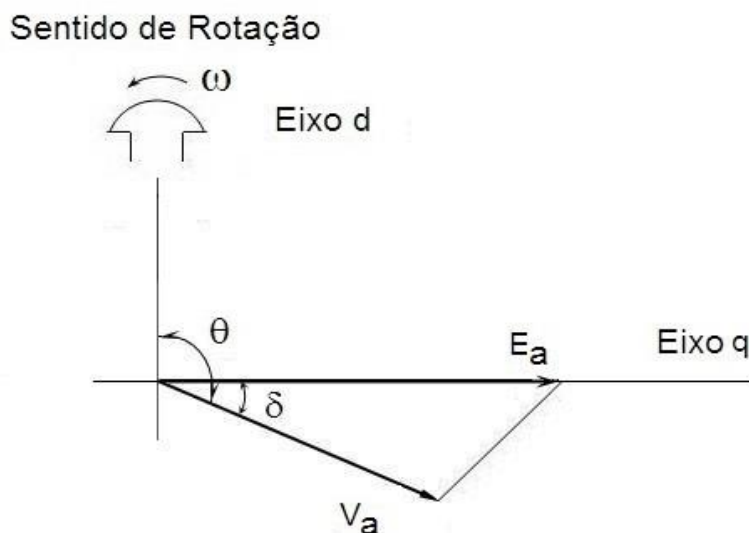


Figura 3.2 – Diagrama Vetorial da Máquina Síncrona para a Fase a

Na figura 3.2, considerar que o ângulo elétrico de giro do sistema seja dado pela seguinte expressão:

$$\theta(t) = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

onde ω é a rotação ou frequência do conjunto girante, geralmente tomada como um valor fixo, síncrono e sob controle automático em função da presença do regulador de velocidade.

Em relação à figura 3.2, deve-se notar que essa representação expressa a posição momentânea dos vetores de tensão da máquina síncrona, mormente o vetor de tensão terminal da fase a, vetor v_a em relação ao vetor da tensão de excitação E_a que se encontra sobre o eixo q. Deste modo, num dado momento em que a localização do rotor fica definida, o vetor da tensão terminal relativa à fase a está localizado exatamente a um ângulo θ radianos elétricos atrás do eixo d cuja flecha positiva indica o sentido da fmm perpendicular ao plano de uma espira hipotética que concentraria toda a corrente gerada na fase a pelo processo de conversão eletrodinâmica da máquina elétrica. A equação 3.2 é bem clara nessa interpretação.

Nota importante: A partir desse ponto, no sentido de dar mais clareza e simplicidade ao equacionamento que será um tanto quanto trabalhoso, nas designações de grandezas variantes no domínio temporal será suprimida a denotação (t) como indicação de dependência da variável tempo.

Assim, a equação 002, de modo mais simplificado, tomará a seguinte forma:

$$\theta = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2}$$

Considerando- se a matriz P, da transformação desejada, vem que:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \sin \theta & \sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A transformação P, aqui utilizada, trata-se de uma transformação ortogonal, ou seja, aquela que obedece à seguinte operação quando a inversa da matriz original é exatamente igual a sua transposta:

$$P^{-1} = P^T \quad (3.4)$$

Portanto, para as correntes, para as tensões e para os fluxos magnéticos enlaçados, grandezas variantes no tempo e associadas à armadura da máquina síncrona e refletidas no sistema d-q-0, pode-se escrever, de forma matricial resumida, que:

$$i_{dq0} = P i_{abc} \quad (3.5)$$

$$v_{dq0} = P v_{abc} \quad (3.6)$$

$$\lambda_{dq0} = P \lambda_{abc} \quad (3.7)$$

A matriz inversa da matriz P de transformação é a seguinte:

$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A transformação escolhida garante a invariância da potência em ambos os sistemas a-b-c e d-q-0 e para comprovar isso bastará considerar a expressão da potência instantânea, no domínio do tempo, deliberada por uma máquina síncrona operando como gerador. Assim, vem que, levando-se em conta as tensões e correntes instantâneas de cada uma das fases do estator da máquina síncrona, variantes no tempo:

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \quad (3.9)$$

Onde:

p: potência instantânea total gerada;

$v_{a,b,c}$: tensões instantâneas de estator por fase;

$i_{a,b,c}$: correntes instantâneas de estator por fase.

De outra maneira, a equação 3.9 pode ser reescrita numa forma mais adequada para as operações matriciais futuras. Deste modo, tem-se que:

$$p = [v_{abc}]^T [i_{abc}] \quad (3.10)$$

Notar que as tensões e as correntes instantâneas de estator da máquina síncrona se distribuem na forma de uma matriz coluna, assim como tais entidades são denominadas na teoria. Isso quer dizer que:

$$[v_{abc}] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = v_{abc} \quad (3.11)$$

e

$$[i_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = i_{abc} \quad (3.12)$$

Notar que na equação 010, a matriz coluna das tensões de fase teve de ser transposta para que a operação de multiplicação matricial tivesse consistência.

A partir das equações 005 e 006, podem-se escrever as seguintes equações, respectivamente para as correntes e as tensões de fase da máquina síncrona:

$$i_{abc} = P^{-1} i_{dqo} \quad \text{e} \quad v_{abc} = P^{-1} v_{dqo}$$

Levando-se as expressões anteriores, respectivamente para as correntes e para as tensões, na equação 3.10, vem que:

$$p = [P^{-1} v_{dqo}]^T [P^{-1} i_{dqo}] = [v_{dqo}]^T [P^{-1}]^T P^{-1} i_{dqo} \quad (3.13)$$

Uma importante observação relativa à transformação via matriz P é que ela se trata de uma transformação ortogonal, valendo então a relação da equação 3.13 anterior e as observações concernentes a esta.

A partir da matriz de transformação P, tem-se, para a equação 3.13 referente à potência total instantânea transferida pela máquina síncrona, que:

$$p = \left[v_{dq0} \right]^T P P^{-1} i_{dq0} = \left[v_{dq0} \right]^T i_{dq0} \quad (3.14)$$

Através do cálculo matricial anterior fica comprovada a invariância da potência na transformação a-b-c – d-q-0. Essa propriedade será fundamental para o estudo da transformação $G_{dq0} = P G_{abc}$ e vice versa.

Uma observação interessante: quando se trabalha com sistemas trifásicos equilibrados, as projeções das grandezas sobre o eixo 0 tornam-se nulas uma vez que a existência desse eixo tem a ver apenas com a questão de um possível desequilíbrio entre as grandezas trifásicas.

3.2.3. Equação Geral dos Fluxos Enlaçados

Na figura 3.1, embora muito simples, podem-se verificar os enrolamentos que interferem no processo de trabalho de uma máquina síncrona.

Tendo em vista se tratar de uma máquina síncrona trifásica, notam-se os enrolamentos do estator, em número de três, o enrolamento de campo e os enrolamentos amortecedores.

Em todos estes enrolamentos aparecem os efeitos da indução própria e da indução mútua, uma vez que eles se interagem simultaneamente.

De uma maneira geral, podem-se equacionar os efeitos dos fluxos enlaçados segundo a relação matricial seguinte.

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ \hline L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde

$\lambda_{a,b,c,F,D,Q}$: fluxos instantâneos enlaçados nos enrolamentos indicados pelos índices

$L_{a,b,c,F,D,Q}$: indutâncias de estator e rotor por fase

$i_{a,b,c,F,D,Q}$: correntes instantâneas de estator e rotor por fase

Considerar para a designação da indutância L_{ij} que:

$j=i$: para a indutância própria do enrolamento considerado;

$j \neq i$: para a indutância no enramamento i devido ao enrolamento j .

3.2.4. Indutâncias Próprias e Mútuas do Estator

Para obtenção das fórmulas das indutâncias próprias e mútuas do estator de uma máquina síncrona considerar os cálculos cujos desenvolvimentos podem ser vistos na referência [6]. Simplesmente, as expressões são as seguintes:

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta \quad (3.16)$$

onde

$$L_s = N_a^2 \frac{\Im_d + \Im_q}{2}$$

e

$$L_m = N_a^2 \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Nas equações anteriores considerar:

N_a : número de espiras da fase a do estator;

$\Im_d$: permeância magnética do eixo d do rotor;

$\Im_q$: permeância magnética do eixo q do rotor.

Portanto L_{aa} possui uma parcela síncrona L_s e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m \cos 2\theta$. Considerando as outras duas fases do estator da máquina síncrona, têm-se as seguintes expressões para as indutâncias próprias do estator:

$$L_{bb} = L_S + L_m \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.17)$$

$$L_{cc} = L_S + L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.18)$$

Para a indutância mútua tem-se que:

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_S - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.19)$$

onde

$$M_S = N_a^2 \frac{\Im_d + \Im_q}{4}$$

e

$$L_m = N_a^2 \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Portanto L_{ab} ou L_{ba} possui uma parcela síncrona M_S e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$.

Utilizando da analogia com a equação 3.19 relativa à influência da fase a na fase b, considerando-se que as outras duas fases do estator da máquina síncrona devem receber tratamento matemático semelhante, já que o sistema é considerado trifásico e equilibrado, tem-se para estas fases as seguintes expressões para as indutâncias mútuas do estator:

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_S - L_m \cos 2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.20)$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_S - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right) \quad (3.21)$$

3.2.5. Indutâncias Próprias e Mútuas do Rotor

As indutâncias próprias e mútuas do rotor independem do ângulo θ de giro da máquina síncrona, referenciado na equação 002, uma vez que seus valores já

se encontram vinculados aos eixos d e q relativos ao sistema de eixos já em movimento na velocidade síncrona.

Assim, para as indutâncias próprias do rotor, tem-se, considerando no rotor os enrolamentos amortecedores de eixo direto e de eixo em quadratura D e Q, respectivamente, e o enrolamento de campo apenas no eixo direto, enrolamento F, seguindo a designação mais comum na literatura.

Para o enrolamento de campo tem-se que:

$$L_{FF} = L_F \quad (3.22)$$

Para o enrolamento amortecedor de eixo direto:

$$L_{DD} = L_D \quad (3.23)$$

Para o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura:

$$L_{QQ} = L_Q \quad (3.24)$$

Para as indutâncias mútuas tem-se que:

para campo e o enrolamento amortecedor D:

$$L_{FD} = L_{DF} = M_R \quad (3.25)$$

para campo e o enrolamento amortecedor Q:

$$L_{FQ} = L_{QF} = 0 \quad (3.26)$$

para os enrolamentos amortecedores D e Q:

$$L_{DQ} = L_{QD} = 0 \quad (3.27)$$

Nota: nas equações 3.26 e 3.27, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos D e Q e entre os enrolamentos F e Q, nesse sentido, são nulas, isso porque esses enrolamentos fictícios perfazem entre si um ângulo teórico de 90°. O

fluxo indutor da máquina síncrona é dado pela fórmula $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$, uma grandeza escalar do cálculo vetorial onde o integrando é o produto escalar do

vetor indução magnética $\vec{B}$ pelo vetor relativo à área $d\vec{s} = \hat{n}ds$, um vetor normal à superfície S por onde o fluxo passa. Essa integral, para o presente caso, é nula uma vez que o ângulo envolvido vale 90° .

3.2.6. Indutâncias Mútuas Entre Estator e Rotor

Considerando que a fem gerada no enrolamento de campo apresenta apenas a componente de eixo direto, torna-se possível a obtenção das expressões para as indutâncias mútuas do estator com o enrolamento de campo.

$$L_{aF} = N_f^2 \Im_d \cos \theta \quad (3.28)$$

ou simplesmente

$$L_{aF} = L_{Fa} = M_F \cos \theta \quad (3.29)$$

Analogamente, para as demais fases, tem-se que:

$$L_{bF} = L_{Fb} = M_F \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad (3.30)$$

$$L_{cF} = L_{Fc} = M_F \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (3.31)$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se, considerando a fase a e o enrolamento D:

$$L_{aD} = L_{Da} = M_D \cos \theta \quad (3.32)$$

onde

$$M_D = N_a^2 \Im_d$$

Analogamente para as indutâncias mútuas entre as demais fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se:

$$L_{bD} = L_{Db} = M_D \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad (3.33)$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = M_D \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (3.34)$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura, Q, tem-se um caso análogo ao anterior, porém com a projeção executada sobre o eixo q.

Assim

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_Q \sin \theta \quad (3.35)$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_Q \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad (3.36)$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_Q \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (3.37)$$

onde

$$M_Q = N_a^2 \mathfrak{I}_q$$

3.2.7. Equações dos Fluxos Enlaçados e Desenvolvimento

Considerando-se a equação 3.15, relativa aos fluxos enlaçados envolvidos com a máquina síncrona, e em seus valores instantâneos, numa forma simbólica mais compacta, vem:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Multiplicando os membros da equação 3.38 pela matriz seguinte indicada na equação matricial obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde

I é uma matriz unitária 3x3 e P a matriz da transformação d-q-0.

Promovendo-se as operações, inclusive a multiplicação do segundo membro da equação 040 pelo produto unitário matricial $P^{-1}P=1$, vem que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

E também:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o,d,q} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A equação matricial 3.41 encontra-se numa forma compactada. Descompactando-a obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda_o \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L_d = L_S + M_S + \frac{3}{2}L_m$$

$$L_q = L_S + M_S - \frac{3}{2}L_m$$

$$L_o = L_S - 2M_S$$

3.2.8. Equações das Tensões

O esquema do diagrama da figura 3.3 mostra os circuitos dos enrolamentos componentes de uma máquina síncrona real operando como gerador.

Considerando o esquema da figura 3.3, segue então a equação matricial compactada das tensões envolvidas na máquina síncrona, em seus valores instantâneos. O ponto sobre a grandeza indica derivada desta em relação ao tempo.

$$v - v_n + r \dot{i} - \lambda + 0 \quad (3.43)$$

De maneira expandida, a equação matricial anterior toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

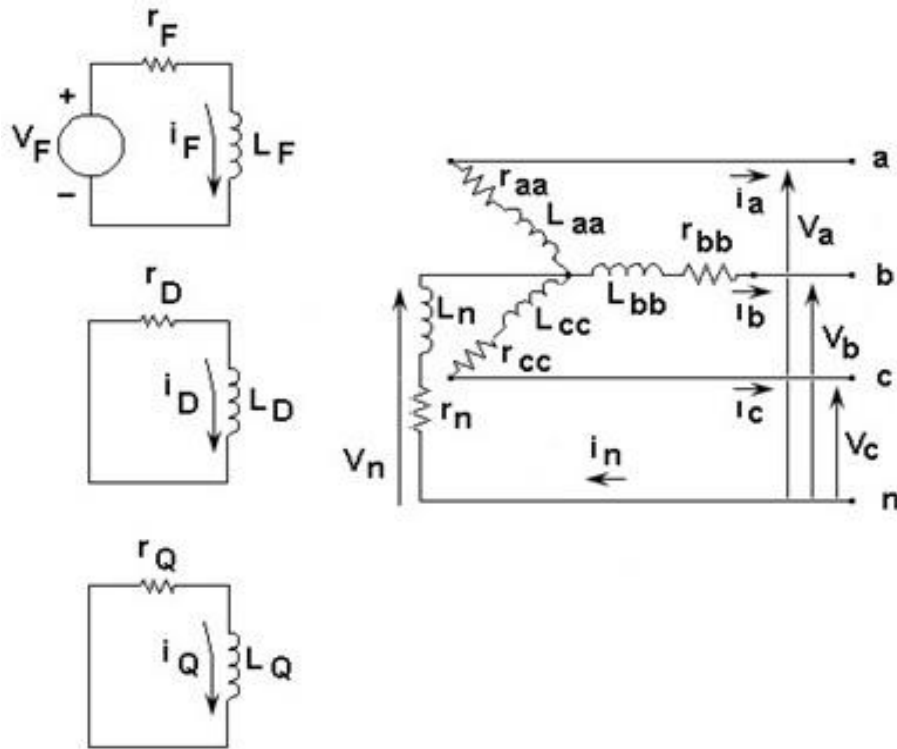


Figura 3.3 – Enrolamentos Reais da Máquina Síncrona

Na figura 3.3 considerar, além das variáveis e parâmetros conhecidos e já definidos anteriormente, a seguinte legenda:

$r_{aa,bb,cc,F,D,Q}$: resistências dos enrolamentos;

v_F : tensão instantânea de campo;

i_n : corrente instantânea de neutro

r_n : resistência de neutro do estator;

L_n : indutância de neutro do estator.

Para determinação da matriz v_n relativa às correntes envolvidas tem-se:

$$v_n = - \begin{bmatrix} r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

De maneira mais resumida, a equação 3.45 toma a seguinte forma mais compacta:

$$V_n = -R_n i_{a,b,c} - L_n \dot{i}_{a,b,c} \quad (3.46)$$

De maneira compacta, a equação 3.43 poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_{a,b,c} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a,b,c} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{a,b,c} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

Aplicando-se à equação 3.47 a transformação d-q-0 pela matriz P, sobre as variáveis das vem que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{a,b,c} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,d,q} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Considerando, a partir daqui, toda a dedução algébrica que pode ser vista nas referências [1] e [6], obtém-se a seguinte equação matricial das tensões

instantâneas em função das correntes instantâneas relativas aos enrolamentos da máquina síncrona.

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ v_D = 0 \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_a + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r_c & -\omega M_F & -\omega KM_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} L_o + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ i_o \\ \bullet \\ i_d \\ \bullet \\ i_q \\ \bullet \\ i_F \\ \bullet \\ i_D \\ \bullet \\ i_Q \end{bmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

Utilizando a equação 3.49, pode-se representar o circuito equivalente para uma máquina síncrona, como se vê na figura 3.4, com $r_a = r_b = r_c = r$, uma vez que todo projetista de máquina síncrona persegue esta condição.

Pela figura 3.4, pode-se perceber, no circuito dos eixos d e q, a presença de duas tensões que são proporcionais ao movimento atual de rotação do conjunto e que são chamadas tensões de rotação.

Portanto, as relações obtidas não são lineares, mas, por aproximação, tomando-se a velocidade de rotação ω como constante, uma vez que a máquina síncrona dispõe um regulador de velocidade, o problema fica resolvido obtendo-se a linearização procurada. Lembrar que é mais prático e conveniente se trabalhar com equações lineares.

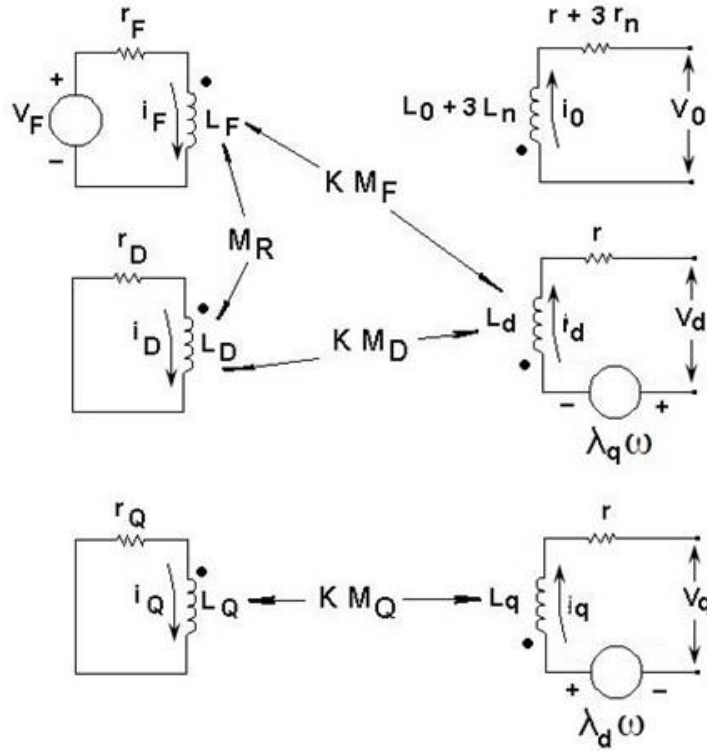


Figura 3.4 – Circuito Equivalente da Máquina Síncrona

3.2.9. Valores em Por Unidade no Estudo da Máquina Síncrona

Cabe aqui uma observação, para a utilização das equações da máquina síncrona em por unidade há necessidade de se proceder à normalização das grandezas envolvidas no processo.

Para a normalização das grandezas utilizadas deverá ser adotado um referencial baseado no rotor, proposição feita por alguns autores apesar da escolha depender de certos critérios.

Os fluxos enlaçados mútuos dependem da parcela mútua das indutâncias que compõem o sistema magnético da máquina síncrona.

Considerando as parcelas do fluxo mútuo e do fluxo de dispersão, por definição, pode-se escrever a seguinte expressão para o valor total da indutância de eixo direto da máquina síncrona, primeiro caso a ser visto e a ser seguido daqui para frente neste tópico.

$$L_d = L_{md} + L_{dd} \quad (3.50)$$

onde

L_{md} : indutância mútua útil referente ao eixo d;

L_{md} : indutância de dispersão útil referente ao eixo d.

A indutância de dispersão tem a ver com o fluxo perdido no entreferro.

Assim, ficam definidas, para todas as indutâncias em jogo, as relações seguintes referentes às parcelas úteis de cada uma em seu respectivo enrolamento conforme é mostrado na figura 3.4:

$$\begin{aligned}L_{md} &= L_d - L_{dd} \\L_{mq} &= L_q - L_{dq} \\L_{mF} &= L_F - L_{dF} \\L_{mD} &= L_D - L_{dD} \\L_{mQ} &= L_Q - L_{dQ}\end{aligned}\tag{3.51}$$

As relações elementares para um determinado valor de fluxo enlaçado λ_B , aqui tomado como um valor base que construirá a base de valores a ser escolhida no processo de normalização envolvendo outras grandezas tais como a tensão base V_B , a indutância base L_B , a corrente base I_B e rotação base ω_B , são as seguintes:

$$\lambda_B = L_B I_B \tag{3.52}$$

$$\lambda_B = \frac{V_B}{\omega_B} = L_B I_B \tag{3.53}$$

com

$$\omega_B = \frac{1}{t_B} \tag{3.54}$$

Notar que a equação 3.54 define uma grandeza que não deve ser confundida, trata-se do tempo base que é exatamente o inverso da velocidade angular elétrica, o que para o sistema elétrico nacional, SIN, tem seu valor aproximado para $\omega_B = 2\pi 60 = 377 \text{ rad/s}$.

As seguintes premissas serão obedecidas:

$$S_B = V_B I_B \rightarrow \text{potência para sistemas monofásicos;}$$

$$S_B = \sqrt{3} V_B I_B \rightarrow \text{potência total para sistemas trifásicos.}$$

onde

S_B : MVA monofásico de base para sistemas monofásicos;

S_B : MVA trifásico de base para sistemas trifásicos.

Podem-se então definir, a partir de certas condições, as grandezas básicas do rotor.

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}\lambda_{md} &= L_{md} I_B = K M_F I_{FB} = K M_D I_{DB} \\ \lambda_{mF} &= K M_F I_B = L_{mF} I_{FB} = M_R I_{DB} \\ \lambda_{mD} &= K M_D I_B = M_R I_{FB} = L_{mD} I_{DB} \\ \lambda_{mq} &= L_{mq} I_B = K M_Q I_{QB} \\ \lambda_{mQ} &= K M_Q I_B = L_{mQ} I_{QB}\end{aligned} \quad (3.55)$$

Nas equações 3.55, a ideia foi obter uma escolha de correntes base que, a partir da corrente base circulante por um determinado enrolamento, através de sua indutância própria útil, obter uma corrente induzida base nos outros enrolamentos por esse primeiro enrolamento influenciado por intermédio das indutâncias mútuas.

EXEMPLO 3.1

Utilizando-se das equações 3.55, provar que as indutâncias mútuas em pu $K M_{FU}$ e $K M_{DU}$ são iguais.

Solução:

Das equações 3.55, podem-se escrever as seguintes relações:

$$\lambda_{md} = L_{md} I_B = KM_F I_{FB} = KM_D I_{DB}$$

Tomando-se a última igualdade tem-se:

$$KM_F I_{FB} = KM_D I_{DB} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_D} = \frac{I_{DB}}{I_{FB}} \quad (3.56)$$

Porém sabe-se ainda da equação 3.53 que:

$$KM_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B I_{FB}} \quad \therefore \quad I_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B KM_{FB}} \quad (3.57)$$

$$KM_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B I_{DB}} \quad \therefore \quad I_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B KM_{DB}} \quad (3.58)$$

Levando na equação 3.56 as expressões encontradas nas equações 3.57 e 3.58 para as correntes de base I_{FB} e I_{DB} , obtém-se:

$$\frac{KM_F}{KM_D} = \frac{\frac{V_B}{\omega_B KM_{DB}}}{\frac{V_B}{\omega_B KM_{FB}}} = \frac{KM_{FB}}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_{FB}} = \frac{KM_D}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad KM_{FU} = KM_{DU}$$

Por analogia ao resultado obtido anteriormente, pode-se generalizar para os circuitos dos eixos d e q da máquina síncrona que:

$$L_{mdu} = L_{mfu} = L_{mdu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU} \quad (3.59)$$

$$L_{mqu} = L_{mqu} = KM_{QU}$$

As equações 3.59 são de extrema importância quando da elaboração dos circuitos equivalentes de eixos d e q, em pu, da máquina síncrona.

Nota a respeito do exemplo 1:

Observar sempre que, na definição dos valores base para as indutâncias KM_{FB} e KM_{DB} , nas equações 3.57 e 3.58, a tensão base se refere ao enrolamento em

questão, porém a corrente base se refere ao enrolamento que criou o fluxo magnético. Essa proposta de base de valores é assim adotada para que os valores em pu das indutâncias mútuas sejam iguais, uma particularidade opcional visando à obtenção de facilidades para futuros cálculos.

EXEMPLO 3.2

Comprovar as equações 3.55 a partir de uma condição genérica.

Solução:

Para a comprovação propriamente dita, será utilizado nas variáveis um subscrito, apenas nesse exemplo, para que fique bem indicado a qual dos circuitos equivalentes d, D, F, q, Q o cálculo se refere.

Imaginando uma escolha genérica para as correntes de base circulantes, tem-se o seguinte raciocínio.

a) enrolamento d

Os fluxos enlaçados vistos do enrolamento d serão os seguintes então:

$$\begin{aligned}\lambda_{md_d} &= L_{md} I_B \\ \lambda_{mF_d} &= L_{mF} I_{FB} \\ \lambda_{mD_d} &= L_{mD} I_{DB}\end{aligned}\tag{3.60}$$

Para os três fluxos anteriores, a tensão base será sempre a tensão referente ao eixo d, ou seja, V_B , já que o efeito se dá no enrolamento de estator. Tomando-se os valores em pu para cada um dos três fluxos enlaçados da equação 3.60 vem que:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\lambda_{md_d}}{\lambda_{md_{dB}}} = \frac{L_{md} I_B}{L_{mD} I_{DB}} = \frac{L_{md}}{L_{mD}}\tag{3.61}$$

A indutância base referente ao eixo d é dada por:

$$L_{mdB} = \frac{V_B}{\omega_B I_B} \quad (3.62)$$

Com a expressão anterior, a equação 3.61 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\omega_B I_B}{V_B} L_{md} \quad (3.63)$$

Por analogia, os fluxos enlaçados para $\lambda_{mF_{du}}$ e $\lambda_{mD_{du}}$ serão:

$$\lambda_{mF_{du}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_B} KM_F \quad (3.64)$$

e

$$\lambda_{mD_{du}} = \frac{\omega_B I_{DB}}{V_B} KM_D \quad (3.65)$$

Para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{md_{du}} = \lambda_{mF_{du}} = \lambda_{mD_{du}} \quad (3.66)$$

Deste modo, tem-se então que:

$$I_B L_{md} = I_{FB} KM_F = I_{DB} KM_D = \lambda_{md} \quad (3.67)$$

b) enrolamento q

Estendendo o raciocínio para o enrolamento q vem:

$$I_B L_{mq} = I_{QB} KM_Q = \lambda_{mq} \quad (3.68)$$

c) enrolamento F

Para o enrolamento de campo, em termos de fluxo magnético enlaçado, considerando-se a circulação da corrente base desse enrolamento, tem-se que:

$$\lambda_{mF_F} = L_{mF} I_{FB}$$

Tomando o valor em pu para fluxo magnético enlaçado desse enrolamento, obtém-se:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{L_{mF} I_{FB}}{L_{mFB} I_{FB}} \quad (3.69)$$

A indutância base referente ao eixo F é dada por:

$$L_{mFB} = \frac{V_{FB}}{\omega_B I_{FB}} \quad (3.70)$$

Com a expressão anterior, a equação 3.69 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_{FB}} L_{mF} \quad (3.71)$$

Por analogia, os fluxos enlaçados para $\lambda_{mD_{Fu}}$ e $\lambda_{mQ_{Fu}}$ serão:

$$\lambda_{mD_{Fu}} = \frac{\omega_B I_D}{V_{FB}} K M_F \quad (3.72)$$

e

$$\lambda_{mQ_{Fu}} = \frac{\omega_B I_Q}{V_{FB}} M_R \quad (3.73)$$

Também aqui, para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{mD_{Fu}} = \lambda_{mF_{Fu}} = \lambda_{mQ_{Fu}} \quad (3.74)$$

Deste modo também, tem-se então que:

$$I_{FB} L_{mF} = I_D K M_F = I_Q M_R = \lambda_{mF} \quad (3.75)$$

d) enrolamentos D e Q

Por analogia, podem-se escrever as seguintes equações para os fluxos enlaçados nesses enrolamentos:

$$I_{DB} L_{mD} = I_B K M_D = I_{FB} M_R = \lambda_{mD} \quad (3.76)$$

e

$$I_{QB} L_{mQ} = I_B K M_Q = \lambda_{mQ} \quad (3.77)$$

Ficando, deste modo, comprovadas as equações 3.65.

Nota a respeito do exemplo 2:

Multiplicando-se as equações 3.67, 3.75 e 3.76, relativas ao eixo d, respectivamente, por I_B , I_{FB} e I_{DB} , vem que:

$$\lambda_{md} I_B = L_{md} I_B^2 = K M_F I_{FB} I_B = K M_D I_{DB} I_B \quad (3.78)$$

e

$$\lambda_{mF} I_{FB} = K M_F I_B I_{FB} = L_{mF} I_{FB}^2 = M_R I_{FB} I_{DB} \quad (3.79)$$

e

$$\lambda_{mD} I_{DB} = K M_D I_B I_{DB} = M_R I_{FB} I_{DB} = L_{mD} I_{DB}^2 \quad (3.80)$$

Do mesmo modo para o eixo q, multiplicando-se as equações 3.68 e 3.77, respectivamente, por I_B e I_{QB} , vem que:

$$\lambda_{mq} I_B = L_{mq} I_B^2 = K M_Q I_{QB} I_B \quad (3.81)$$

e

$$\lambda_{mQ} I_{QB} = K M_Q I_B I_{QB} = L_{mQ} I_{QB}^2 \quad (3.82)$$

Por uma imposição do problema, as equações 078, 079 e 080, relativas ao eixo d, são iguais, logo vale a seguinte relação primordial:

$$L_{md} I_B^2 = L_{mF} I_{FB}^2 = L_{mD} I_{DB}^2 = K M_F I_{FB} I_B = K M_D I_{DB} I_B = M_R I_{FB} I_{DB} \quad (3.83)$$

Do mesmo modo para o eixo q, as equações 3.81 e 3.82 são iguais, logo vale a outra relação primordial:

$$L_{mq}I_B^2 = L_{mQ}I_{QB}^2 = KM_Q I_{QB} I_B \quad (3.84)$$

As equações 3.78, 3.79, 3.80, 3.81 e 3.82, chamadas aqui de equações primordiais, são relações que confirmam que as potências desenvolvidas nos diferentes enrolamentos dos eixos d e q da máquina síncrona, em termos dos valores base escolhidos nesse contexto, são iguais.

Na realidade, as equações 3.55 são uma consequência da condição imposta relativa à conservação da energia entre os enrolamentos dos eixos d e q da máquina síncrona.

Considerando as equações 3.83 e 3.84, além de se manter a mesma potência base de valores, podem-se escrever, para os três enrolamentos do rotor, as seguintes expressões:

$$\frac{I_{FB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{FB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mF}}} = \frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} = \frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad (3.85)$$

$$\frac{I_{DB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{DB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mD}}} = \frac{L_{md}}{KM_D} = \frac{KM_D}{L_{mD}} = \frac{KM_F}{M_R} = K_D \quad (3.86)$$

$$\frac{I_{QB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{QB}} = \sqrt{\frac{L_{mq}}{L_{mQ}}} = \frac{L_{mq}}{KM_Q} = \frac{KM_Q}{L_{mQ}} = K_Q \quad (3.87)$$

Assim, as variáveis de corrente de base e de tensão de base são escolhidas de modo que em qualquer enrolamento a potência base seja sempre a mesma. Portanto, conhecendo-se L_B e R_B , das bases do estator, vem:

$$\frac{R_{FB}}{R_B} = \frac{1}{K_F^2} \quad , \quad \frac{R_{DB}}{R_B} = \frac{1}{K_D^2} \quad , \quad \frac{R_{QB}}{R_B} = \frac{1}{K_Q^2} \quad (3.88)$$

$$\frac{L_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F^2} \quad , \quad \frac{L_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D^2} \quad , \quad \frac{L_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q^2} \quad (3.89)$$

E para as indutâncias mútuas será utilizada uma propriedade extraída da equação 3.90, senão veja-se.

$$\frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} \quad \therefore \quad KM_F^2 = L_{md} L_{mF} \quad (3.90)$$

Nota: nessa propriedade, nota-se que, considerando o efeito mútuo entre dois circuitos magneticamente conectados, o produto das indutâncias próprias úteis de cada circuito elétrico é igual ao quadrado da indutância mútua verificada entre ambos.

Deste modo, por consequência, levando-se em conta uma base de valores previamente definida, o quadrado do valor da indutância mútua base entre dois circuitos magneticamente conectados será igual ao produto dos valores das indutâncias próprias base de cada um dos circuitos envolvidos.

Assim:

$$M_{FB}^2 = L_B L_{FB} \quad \therefore \quad \frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{L_{FB}}{M_{FB}} \quad (3.91)$$

Mas, da equação 085, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_F} = K_F$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F} \quad (3.92)$$

Mas, da equação 3.86, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_D} = K_D$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D} \quad (3.93)$$

Mas, da equação 087, tem-se que $\frac{L_{mq}}{KM_Q} = K_Q$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q} \quad (3.94)$$

Da equação 3.85 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad \therefore \quad \frac{L_{md}}{L_{md}} \frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad \therefore \quad \frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F} \frac{KM_D}{L_{md}} \quad (3.95)$$

Da equação 3.86 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{L_{md}} = \frac{1}{K_D} \quad (3.96)$$

Logo, a partir da equação 3.95, obtém-se para a equação 3.96, que:

$$\frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F K_D} \quad (3.97)$$

Em termos de relação base, a partir da equação 3.97, vem que:

$$\frac{M_{RB}}{L_B} = \frac{1}{K_F K_D} \quad (3.98)$$

A equação 098 completa o conjunto de equações envolvendo os valores base fornecendo o caminho para o cálculo das demais relações.

3.2.10. Equações em Por Unidade

Colocando a equação matricial 3.49, que se encontra em valores atuais, em por unidade obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} V_B v_{ou} \\ V_B v_{du} \\ V_B v_{qu} \\ -V_{FB} v_{Fu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_o + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega KM_F & -\omega KM_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B i_{ou} \\ I_B i_{du} \\ I_B i_{qu} \\ I_{FB} i_{Fu} \\ I_{DB} i_{Du} \\ I_{QB} i_{Qu} \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} L_o + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_B i_{ou} \\ \dot{I}_B i_{du} \\ \dot{I}_B i_{qu} \\ \dot{I}_{FB} i_{Fu} \\ \dot{I}_{DB} i_{Du} \\ \dot{I}_{QB} i_{Qu} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.99)$$

Analisando-se cada uma das tensões do vetor tensão, em separado, iniciando-se pelo eixo d vem que:

$$\begin{aligned}
v_{du} + r \frac{I_B}{V_B} i_{du} + \omega L_q \frac{I_B}{V_B} i_{qu} + \omega KM_Q \frac{I_{QB}}{V_B} i_{Qu} + L_d \frac{I_B}{V_B} \dot{i}_{du} + \\
+ KM_F \frac{I_{FB}}{V_B} \dot{i}_{Fu} + KM_D \frac{I_{DB}}{V_B} \dot{i}_{Du} = 0
\end{aligned} \quad (3.100)$$

Sabe-se que $\frac{1}{L_B \omega_B} = \frac{I_B}{V_B}$, assim a equação 3.100 se transforma na equação 3.101.

$$\begin{aligned}
v_{du} + r_u i_{du} + \omega_u L_{qu} i_{qu} + \omega_u KM_{Qu} i_{Qu} + \\
+ \frac{L_{du}}{\omega_B} \dot{i}_{du} + \frac{KM_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0
\end{aligned} \quad (3.101)$$

Analogamente, para o eixo q, vem:

$$v_{qu} - \omega_u L_{du} i_{du} + r_u i_{qu} - \omega_u^{KM} i_{Fu} - \omega_u^{KM} i_{Du} + \frac{L_{qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0 \quad (3.102)$$

Para o circuito de seqüência zero vem que:

$$v_{ou} + (r + 3r_n) \frac{I_B}{V_B} i_{ou} + (L_0 + 3L_n) \frac{I_B \omega_B}{V_B \omega_B} i_{ou} = 0$$

Assim, obtém-se a seguinte expressão:

$$v_{ou} + R_{ou} i_{ou} + \frac{L_{ou}}{\omega_B} \dot{i}_{ou} = 0 \quad (3.103)$$

$$\text{onde } R_{ou} = \frac{(r + 3r_n)}{V_B} I_B \text{ e } L_{ou} = \frac{(L_0 + 3L_n)}{V_B} I_B \omega_B$$

Para o circuito de campo vem:

$$v_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu} - \frac{KM_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{du} - \frac{L_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} - \frac{M_{RU}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \quad (3.104)$$

E, para os enrolamentos amortecedores, tem-se:

$$r_{Du} i_{Du} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{du} + \frac{M_{Ru}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \quad (3.105)$$

$$r_{Qu} i_{Qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{L_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0 \quad (3.106)$$

Colocando as equações 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105 e 3.106 na forma matricial completa, e normalizando o tempo nas parcelas que apresentam derivadas, obtém-se que:

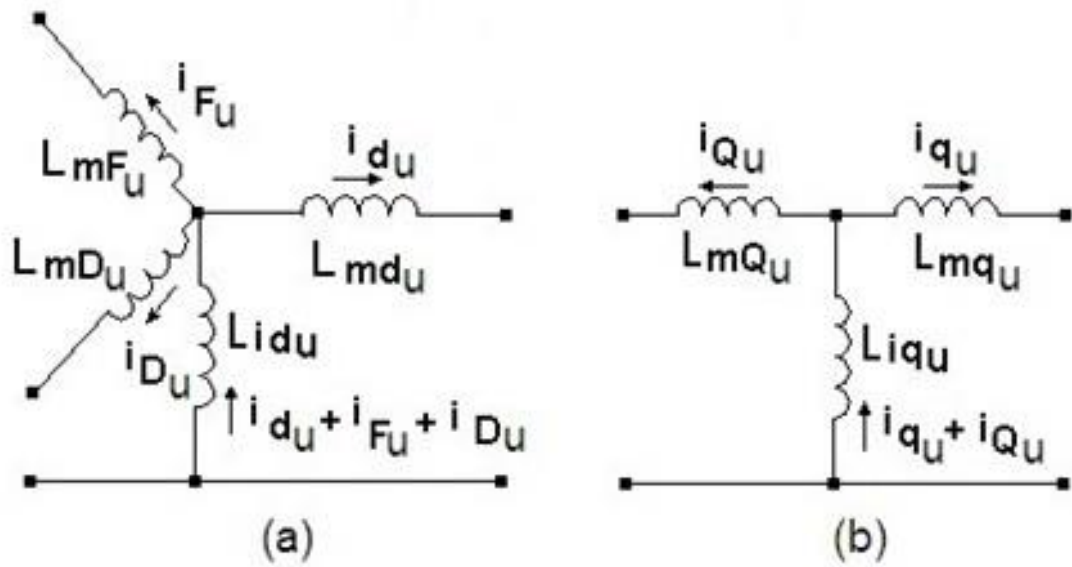


Figura 3.5 – Circuito PU Equivalente de Correntes da Máquina Síncrona para
(a) Eixo d, (b) Eixo q

$$\begin{bmatrix} v_{ou} \\ v_{du} \\ v_{qu} \\ -v_{Fu} \\ v_{Du} = 0 \\ v_{Qu} = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_u & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ 0 & -L_{du} & r_u & -kM_{Fu} & -KM_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{Fu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Qu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ou} \\ i_{du} \\ i_{qu} \\ i_{Fu} \\ i_{Du} \\ i_{Qu} \end{bmatrix} + \\
 + \frac{1}{\omega_B} \begin{bmatrix} L_{ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{du} & 0 & KM_{Fu} & KM_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ 0 & KM_{Fu} & 0 & L_{Fu} & M_{Ru} & 0 \\ 0 & KM_{Du} & 0 & M_{Ru} & L_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & KM_{Qu} & 0 & 0 & L_{Qu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ i_{ou} \\ \bullet \\ i_{du} \\ \bullet \\ i_{qu} \\ \bullet \\ i_{Fu} \\ \bullet \\ i_{Du} \\ \bullet \\ i_{Qu} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.107)$$

3.2.11. Circuito Equivalente da Máquina Síncrona

Como condição a ser obedecida nos desenvolvimentos que se seguem, deve-se levar em conta que o sistema é equilibrado eletricamente com $i_0 = 0$. A base de valores escolhida é aquela descrita no item 3.2.10, precedente, cuja escolha

partiu de certas premissas a fim de se fazer com que as indutâncias mútuas fossem iguais em seus valores em pu.

Os fluxos enlaçados da máquina síncrona, assim como se viu no item 3.2.9, podem ser relacionados, em pu, com os fluxos mútuos e os fluxos de dispersão, respectivamente, de modo que se pode escrever de maneira genérica que:

$$\lambda_{Tu} = \lambda_{du} + \lambda_{mu} \quad (3.108)$$

ou seja, o fluxo enlaçado total λ_T , de um determinado circuito magnético, é a soma dos fluxos de dispersão λ_d e mútuo λ_m , desse mesmo circuito.

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \lambda_{Tdu} &= \lambda_{ddu} + \lambda_{mdu} = L_{ddu}i_{du} + L_{mdu}i_{du} + KM_{Fu}i_{Fu} + KM_{Du}i_{Du} \\ \lambda_{Tqu} &= \lambda_{dqu} + \lambda_{mqu} = L_{dqu}i_{qu} + L_{mqu}i_{qu} + KM_{Qu}i_{Qu} \\ \lambda_{TFu} &= \lambda_{dFu} + \lambda_{mFu} = L_{dFu}i_{Fu} + L_{mFu}i_{Fu} + KM_{Fu}i_{du} + M_{Ru}i_{Du} \\ \lambda_{TDu} &= \lambda_{dDu} + \lambda_{mDu} = L_{dDu}i_{Du} + L_{mDu}i_{Du} + M_{Ru}i_{Fu} + KM_{Du}i_{du} \\ \lambda_{TQu} &= \lambda_{dQu} + \lambda_{mQu} = L_{dQu}i_{Qu} + L_{mQu}i_{Qu} + KM_{Qu}i_{qu} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Das equações 3.59, sabe-se que:

$$\begin{aligned} L_{mdu} &= L_{mFu} = L_{mDu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU} \\ L_{mqu} &= L_{mQu} = KM_{QU} \end{aligned}$$

As duas equações anteriores permitem que se escrevam as seguintes relações em pu:

$$L_{mdu} = KM_{Fu} = KM_{Du} = M_{Ru} = L_{idu} \quad (3.110)$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{Qu} = L_{iqu} \quad (3.111)$$

E criando os fluxos enlaçados associados a cada uma das indutâncias gerais das equações 3.110 e 3.111 vem que:

$$\lambda_{idu} = L_{idu} (i_{du} + i_{Fu} + i_{Du}) \quad (3.112)$$

$$\lambda_{iqu} = L_{iqu}(i_{qu} + i_{Qu}) \quad (3.113)$$

O significado físico das equações 3.112 e 3.113 pode ser representado considerando-se cada um dos eixos d e q como está mostrado na figura 3.5.

Para o circuito equivalente completo, devem-se levar em conta as equações em tensão 3.107, já considerada a condição de se estar trabalhando com um sistema equilibrado trifásico com as resistências das fases do estator tomadas com o mesmo valor, assim como se tem procedido até aqui.

Para o eixo d pode-se escrever que:

$$v_{du} + r_u i_{du} + \frac{1}{\omega_B} \dot{\lambda}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} = 0 \quad (3.114)$$

Da primeira equação das equações 3.109 extrai-se a expressão para λ_{du} total, o que leva a seguinte expressão:

$$\dot{\lambda}_{Tdu} = L_{ddu} \dot{i}_{du} + L_{mdu} \dot{i}_{du} + KM_{Fu} \dot{i}_{Fu} + KM_{Du} \dot{i}_{Du} \quad (3.115)$$

Assim, a expressão da tensão 3.114 para o eixo d tomará a seguinte forma:

$$v_{du} + r_u i_{du} + \frac{1}{\omega_B} L_{ddu} \dot{i}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (3.116)$$

De maneira similar, chega-se às equações de tensão para os demais enrolamentos.

Para o enrolamento de eixo q tem-se que:

$$v_{qu} + r_u i_{qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dqu} \dot{i}_{qu} - \omega_u \lambda_{du} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \quad (3.117)$$

Para o enrolamento de campo tem-se que:

$$-v_{Fu} + r_{Fu} i_{Fu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dFu} \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (3.118)$$

Para os enrolamentos amortecedores D e Q têm-se:

$$v_{Du} = 0 \therefore r_{Du} i_{Du} + \frac{1}{\omega_B} L_{dDu} \dot{i}_{Du} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (3.119)$$

$$v_{Qu} = 0 \therefore r_{Qu} i_{Qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dQu} \dot{i}_{Qu} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \quad (3.120)$$

As figuras 3.6 e 3.7 mostram os circuitos equivalentes de eixo d e eixo q, completos em tensão, respectivamente.

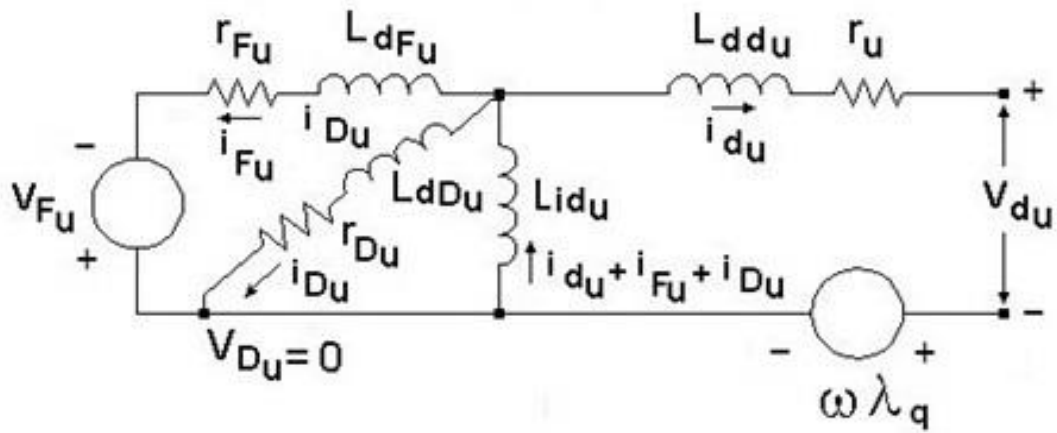


Figura 3.6 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo d

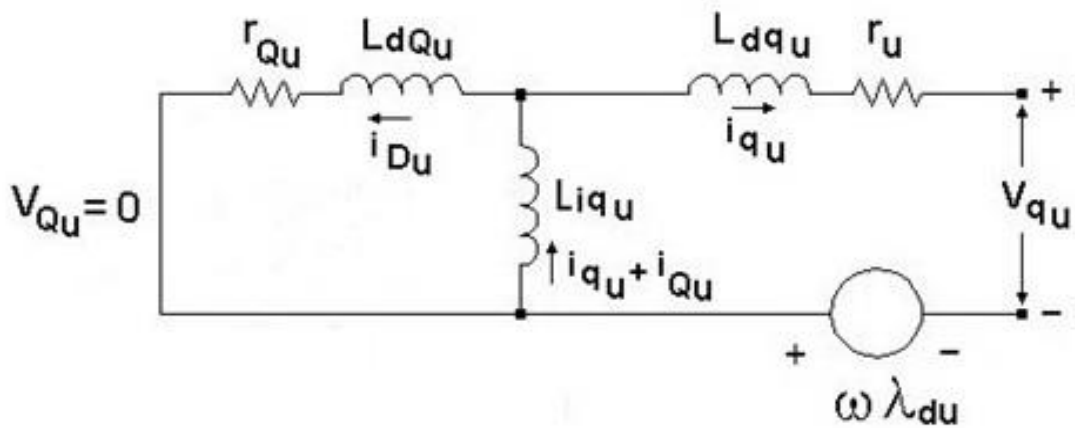


Figura 3.7 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo q

3.2.12. Autoexcitação em Máquinas Síncronas

O fenômeno da autoexcitação em máquinas síncronas é um processo que pode ocorrer quando a máquina estiver conectada a um circuito elétrico de característica capacitiva. Deste modo, qualquer tipo de dispositivo capacitivo que esteja acoplado à máquina síncrona pode vir a provocar esse fenômeno.

Para análise, será suposto o sistema mostrado na figura 3.8.

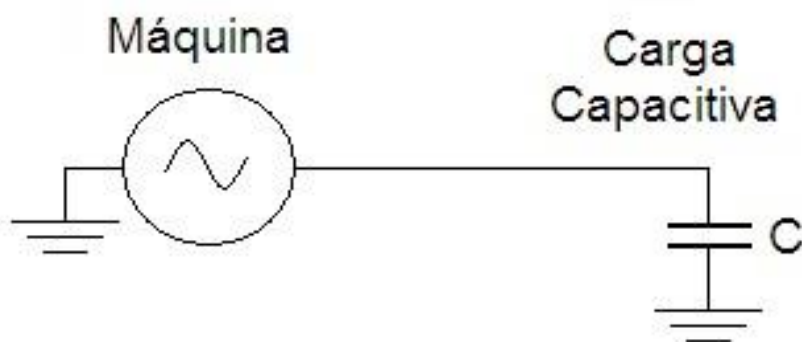


Figura 3.8 – Circuito Máquina Síncrona Conectada a uma Carga Capacitiva

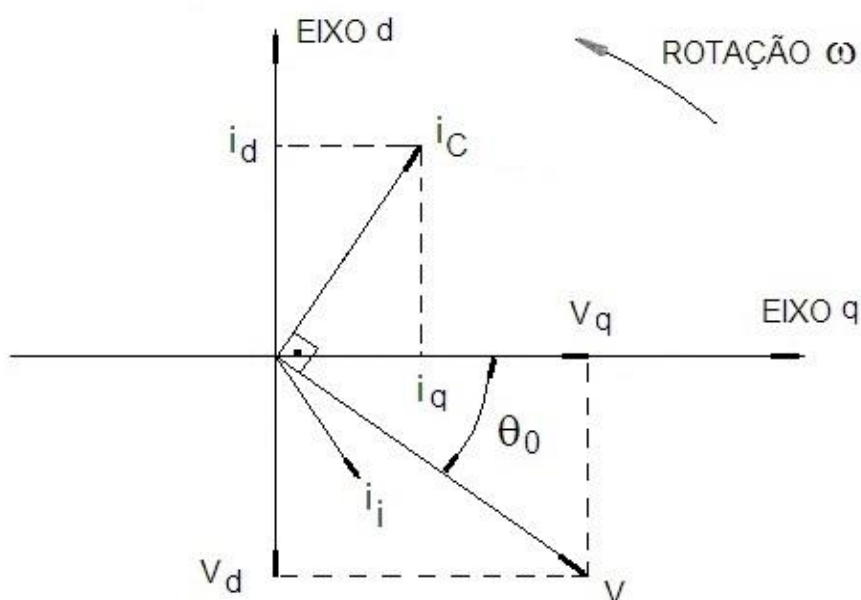


Figura 3.9 – Diagrama Vetorial para o Circuito Máquina Síncrona Conectada a uma Carga Capacitiva

No diagrama da figura 3.9 podem-se observar as grandezas envolvidas no processo sendo i_i a corrente circulante, quando o circuito apresentava apenas uma determinada carga indutiva, e sendo i_c a corrente capacitiva adiantada da tensão terminal v após a entrada da carga capacitiva.

O seguinte equacionamento básico é possível.

$$\begin{aligned}v_d &= v \cos(-\theta) = v \cos \theta \\v_q &= v \sin(-\theta) = -v \sin \theta\end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned}i_d &= i_c \sin(\pi/2 - \theta_0) = i_c \cos \theta_0 \quad \therefore \cos \theta_0 = i_d / i_c \\i_q &= i_c \cos(\pi/2 - \theta_0) = i_c \sin \theta_0 \quad \therefore \sin \theta_0 = i_q / i_c\end{aligned}$$

Considerando-se apenas a presença da carga capacitiva vem que:

$$v = -j X_c i_c \quad \therefore \frac{v}{i_c} = -j X_c$$

Assim, as tensões v_d e v_q tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned}v_d &= -v \left(\frac{i_q}{i_c} \right) = - \left(\frac{v}{i_c} \right) i_q = -(-j X_c) i_q = X_c i_d \\v_q &= v \left(\frac{i_d}{i_c} \right) = \left(\frac{v}{i_c} \right) (i_d) = -j X_c (i_d) = X_c i_q\end{aligned} \quad (3.121)$$

onde $|X_c| = 1/\omega C$ e $j = \sqrt{-1}$.

Considerando o fluxo enlaçado pelo eixo d, através das equações 3.109, desconsiderando o enrolamento amortecedor, tem-se que:

$$\lambda_{du} = L_{du} i_{du} + KM_{Fu} i_{Fu} \quad (3.122)$$

Para o fluxo enlaçado pelo campo, através das equações 3.109, desconsiderando o enrolamento amortecedor, tem-se que:

$$\lambda_{Fu} = L_{Fu} i_{Fu} + KM_{Fu} i_{du} \quad (3.123)$$

Multiplicando a equação 3.123, membro a membro, pela relação $\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}}$ vem que:

$$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = KM_{Fu} i_{Fu} + \frac{(KM_{Fu})^2}{L_{Fu}} i_{du} \quad (3.124)$$

Considerando-se as referências [1] e [6], as seguintes relações são definidas:

$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = \sqrt{3} E_{qu} = e_{qu}$ que é a fem instantânea da máquina síncrona para a condição operação em vazio;

$\frac{KM_{Fu}}{r_{Fu}} v_{Fu} = KM_{Fu} i_{Fu} = \sqrt{3} E_{fd} = e_{fd}$ que é a tensão instantânea de campo da máquina síncrona;

$L_{du} - L'_{du} = \frac{(KM_{Fu})^2}{L_{Fu}}$ que é uma relação primordial.

A partir das relações primordiais anteriores, a equação 3.124 tomará o seguinte aspecto:

$$e_{qu} = KM_{Fu} i_{Fu} + L_{du} i_{du} - L'_{du} i_{du} \quad (3.125)$$

Considerando-se agora a equação 3.123, a equação 3.125 poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$e_{qu} = \lambda_{du} - L'_{du} i_{du}$$

Passando a equação anterior para valores atuais vem que:

$$e_q = \omega \lambda_d - \omega L'_d i_d \quad (3.126)$$

Das equações 3.101 e 3.102 obtêm-se as seguintes expressões para as tensões v_d e v_q , desprezando-se as resistências envolvidas.

$$\begin{aligned} v_d &= -\omega \lambda_q \\ v_q &= \omega \lambda_d \end{aligned} \quad (3.127)$$

Das equações 3.121, a partir das equações 3.127, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \omega \lambda_d &= X_c i_d \\ \omega \lambda_q &= -X_c i_q \end{aligned} \quad (3.128)$$

Assim, a equação 3.126 tomará a seguinte forma:

$$e_q = X_c i_d - \omega L'_d i_d \quad (3.129)$$

O que, finalmente, conduz ao seguinte valor da corrente i_d :

$$i_d = -\frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_d C} e_q \quad (3.130)$$

Se o mesmo raciocínio for levado em consideração para um determinado enrolamento de eixo q, onde todas as condições forem respeitadas, a seguinte expressão para a corrente i_q será obtida:

$$i_q = -\frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_q C} e_d \quad (3.131)$$

A equação 3.104 fornece a expressão em por unidade da tensão de campo, onde a resistência de campo é considerada, o que permite que se escreva a seguinte expressão, considerando-se o fluxo através do campo da máquina síncrona:

$$v_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu} - \dot{\lambda}_{Fu} = 0 \quad (3.132)$$

Na equação 3.132, mais precisamente no termo da derivada do fluxo, a parcela $1/\omega_B$ foi incorporada à variável $\dot{\lambda}_{Fu}$, o que garante estar a variável tempo sendo dada em segundos.

O valor do fluxo enlaçado no campo da máquina síncrona será dado por:

$$\lambda_{Fu} = r_{Fu} \int_0^t \left(\frac{v_{Fu}}{r_{Fu}} - i_{Fu} \right) dt \quad (3.133)$$

Multiplicando a equação 133, membro a membro, pela relação $\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}}$ vem que:

$$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = \frac{r_{Fu}}{L_{Fu}} \int_0^t \left(KM_{Fu} \frac{v_{Fu}}{r_{Fu}} - KM_{Fu} i_{Fu} \right) dt$$

Considerando as relações primordiais e sabendo-se da referência [1] que $T'_{do} = \frac{L_{Fu}}{r_{Fu}}$ é a constante de tempo transitória de eixo direto a circuito aberto

do estator da máquina síncrona, vem que:

$$e_{qu} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t (e_{fd u} - KM_{Fu} i_{Fu}) dt \quad (3.134)$$

Trazendo na equação anterior 3.134 a expressão para $KM_{Fu} i_{Fu}$, da equação 3.125, obtém-se a seguinte expressão mais geral:

$$e_{qu} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ e_{fd u} - [e_{qu} - (L_{du} - L'_{du}) i_{du}] \} dt \quad (3.135)$$

Passando a equação 135 para valores atuais obtém-se que:

$$e_q = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ e_{fd} - [e_q - \omega(L_d - L'_d) i_d] \} dt$$

Ou ainda:

$$\frac{e_q}{\omega} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \left\{ \frac{e_{fd}}{\omega} - \left[\frac{e_q}{\omega} - (L_d - L'_d) i_d \right] \right\} dt \quad (3.136)$$

Trazendo na equação 136 a expressão da corrente i_d , da equação 3.130, tem-se que:

$$\frac{e_q}{\omega} = \frac{1}{T_{do}} \int_0^t \left\{ \frac{e_{fd}}{\omega} - \left[\frac{e_q}{\omega} - (L_d - L'_d) \left(-\frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_d C} e_q \right) \right] \right\} dt$$

Ordenando a equação anterior segundo cada membro e passando o resultado para o plano complexo da transformada de Laplace, sendo S operador complexo, obtém-se que:

$$\frac{1}{\omega} e_q(S) = \frac{1}{T_{do}} \frac{1}{S} \left[\frac{1}{\omega} e_{fd}(S) - \frac{1}{\omega} e_q(S) + (L_d - L'_d) \left(\frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_d C} e_q(S) \right) \right]$$

Rearranjando-se a equação anterior vem:

$$e_q(S) \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega T_{do} S} - (L_d - L'_d) \left(\frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_d C} \right) \right] = \frac{1}{\omega T_{do} S} e_{fd}(S)$$

Multiplicando a equação anterior pelo fator $\omega T_{do} S$ obtém-se que:

$$e_q(S) \left[1 + T_{do} S - (L_d - L'_d) \left(\frac{\omega^2 C}{1 - \omega^2 L'_d C} \right) \right] = e_{fd}(S)$$

As operações subsequentes permitem que se chegue à função de transferência $\frac{e_q(S)}{e_{fd}(S)}$. Assim:

$$e_q(S) = \frac{\frac{1}{T_{do} S}}{S + \frac{1 - \omega^2 L'_d C}{T_{do} (1 - \omega^2 L'_d C)}} e_{fd}(S) \quad (3.137)$$

A equação 3.137 traz, finalmente, a função de transferência entre as tensões de campo e_{fd} e a tensão de excitação e_q quando do carregamento da máquina síncrona por cargas capacitivas, considerando-se o eixo q. Trata-se de uma função de transferência de primeira ordem com um pólo real cujo valor depende dos parâmetros envolvidos no processo.

É evidente que a combinação de valores entre os parâmetros pode designar um pólo positivo ou um pólo negativo o que terá uma influência importante na

questão da presença ou não de sobretensão no campo. A questão torna-se crítica quando o valor do pólo for negativo o que denota pela equação 137 que a resposta no domínio do tempo do sistema será regida por uma exponencial crescente o que representará, fisicamente, a presença de sobretensões elevadíssimas.

Para o caso do eixo d, por analogia aos cálculos efetuados até aqui, a seguinte função de transferência poderá ser obtida:

$$e_d(S) = \frac{\frac{1}{T'_{qo} S}}{S + \frac{1 - \omega^2 L_q C}{T'_{qo} (1 - \omega^2 L'_q C)}} e_{fq}(S) \quad (3.138)$$

3.2.13. Análise da Autoexcitação em Máquinas Síncronas

Pelo que foi determinado no item anterior é possível estabelecer as faixas para os limites de valores dos parâmetros da máquina síncrona em função da questão da sobretensão originária no fenômeno da autoexcitação provocado pela interação entre os parâmetros de máquina versus os parâmetros relativos à carga e, por conseguinte, interferindo com a parte de transmissão do sistema. Considerando que para haver sobretensão o pólo da função de transferência

$\frac{e_q(S)}{e_{fd}(S)}$ deve ser negativo, têm-se as seguintes hipóteses.

Primeira hipótese, com base na equação 3.137:

$$1 - \omega^2 L_d C < 0 \quad e \quad 1 - \omega^2 L'_d C > 0$$

$$1 - \omega^2 L_d C < 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C} < \omega L_d$$

$$1 - \omega^2 L'_d C > 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C} > \omega L'_d$$

Ou seja

$$\omega L'_d < \frac{1}{\omega C} < \omega L_d \quad (3.139)$$

Segunda hipótese, com base na equação 3.137:

$$1 - \omega^2 L_d C > 0 \quad e \quad 1 - \omega^2 L'_d C < 0$$

$$1 - \omega^2 L_d C > 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C} > \omega L_d$$

$$1 - \omega^2 L'_d C < 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C} < \omega L'_d$$

Ou seja

$$\omega L_d < \frac{1}{\omega C} < \omega L'_d \quad (140)$$

Como já é sabido, em termos de máquina síncrona, a impedância de regime permanente ou síncrona X_d será sempre maior que a impedância a essa associada de regime transitório X'_d , fato que inviabiliza a segunda hipótese. Estendendo a análise para o caso em que se foque o eixo d a seguinte condição deverá ser verificada:

$$\omega L'_q < \frac{1}{\omega C} < \omega L_q$$

A equação 3.139 estipula a faixa de valores para a reatância capacitiva relativamente aos valores das reatâncias de eixo direto transitória e de regime permanente onde a possibilidade de ocorrência do fenômeno de autoexcitação no enlace do fluxo de eixo direto é passível de ocorrer.

De modo semelhante, a equação 3.140 estipula a faixa de valores para a reatância capacitiva relativamente aos valores das reatâncias de eixo quadratura transitória e de regime permanente para o caso em questão.

O fenômeno vem então associado ao crescimento exponencial da tensão de excitação da máquina síncrona o que pode trazer danos severos ao conjunto elétrico independente da atuação rápida do sistema automático de excitação.

3.3. Considerações Finais

Pelo que foi exposto, torna-se importante o conhecimento dos parâmetros que vão representar a carga que estará conectada a máquina síncrona. Existem situações em que determinados arranjos são possíveis em função da abertura de determinadas linhas de transmissão ou mesmo situações de baixa carga em que a carga capacitiva torna-se relevante. Nesses casos é interessante analisar todos os arranjos possíveis determinando o valor da carga capacitiva equivalente no sentido de se evitar o fenômeno da autoexcitação. Outro ponto que também deverá ser observado são os esquemas em que são utilizados compensadores capacitivos no sentido de controlar os níveis de tensão. Tais compensadores, dependendo do tamanho, podem concorrer diretamente para culminar com o fenômeno da autoexcitação.

3.4. Referências

- [1] P.M. ANDERSON & A.A. FOUAD, Power System Control and Stability, Ames, Iowa, USA The Iowa State University Press, 1982.
- [2] O.I. ELGERD, Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1976.
- [3] E.W. KIMBARK, Synchronous Machines, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- [4] A.E. FITZGERALD & J.R. KINGSLEY & A. KUSKO, Electric Machinery, The McGraw-Hill, New York, 1961.
- [5] J. FEINSTEIN, Teoria dos Sistemas de Controle Enfoque por Variáveis de Estado, Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1979.
- [6] L.R. GOMES & C.H.F. Da Silva, Sistemas de Regulação e Controle Automático de Usinas de Energia Elétrica, e-book link <https://archive.org/details/SistemasDeRegulaoEControleAutomticoDeUsinasDeEnergiaEltrica>, 2018.
- [7] P.M. ANDERSON, Analysis of Faulted Power System, Ames, Iowa, USA The Iowa State University Press, 1976.

[8] W. A. LEWIS, A Basic Analysis of Synchronous Machines Pt. 1 , AIEE Transactions, PAS 77: Pages 436-455, 1958.

