



FUNDAMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

Luiz Renato Gomes

REVISADO EM 2006

Uberlândia 25/07/2006

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	4
2. REPRESENTAÇÃO DOS SISTEMAS FÍSICOS	4
3. ÁLGEBRA DE BLOCOS	7
4. CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE CONTROLE.....	9
4.1. SISTEMA EM MALHA ABERTA	9
4.2. SISTEMA EM MALHA FECHADA	9
4.3. SISTEMA LINEAR	10
4.4. SISTEMA NÃO LINEAR.....	11
5. CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA	14
5.1. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS	14
5.2. FUNÇÃO.....	15
5.3. LIMITE DE UMA FUNÇÃO	16
5.4. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO	18
5.5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	20
5.6. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	21
5.7. INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO	25
5.8. LEVANTAMENTO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE UM SISTEMA LINEAR CONSIDERANDO O DOMÍNIO COMPLEXO	27

5.9. CÁLCULO DO GANHO E DA FASE DE UMA DETERMINADA FT	33
5.10. RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO	39
5.11. CURVAS DE BODE.....	43
5.12. SISTEMAS ANÁLOGOS	46
5.13. INTRODUÇÃO À ANÁLISE DA ESTABILIDADE EM SISTEMAS DE CONTROLE.....	47
REFERÊNCIAS	52

FUNDAMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

por L.R. Gomes

1. Introdução

A palavra controle vem associada à expressão sistema de controle que consiste num aparato físico chamado processo que transforma uma série de informações de entrada numa série de informações de saída.

Esquemáticamente pode-se caracterizar um sistema de controle como na figura 01.

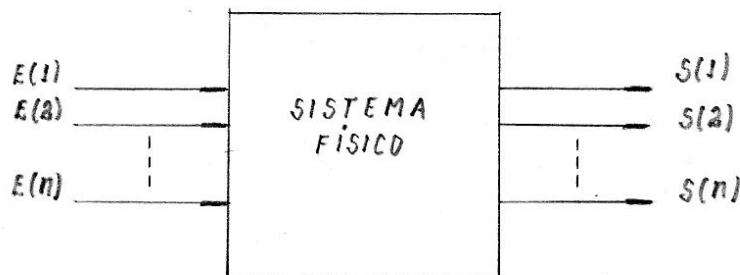


Figura 01 – Sistema de controle

Na figura 01 tem-se:

$E(1), E(2), \dots, E(n)$ - Informações de entrada

$S(1), S(2), \dots, S(n)$ - Informações de saída

2. Representação dos sistemas físicos

Existem muitas maneiras de se representar, esquematicamente, um sistema físico. Têm-se as seguintes representações:

- icônicas ou imagens físicas (tridimensionais);
- gráficas (funções gráficas);
- matemáticas (fórmulas, expressões matemáticas);
- diagramáticas (diagrama de blocos).

Um exemplo de representação importante e muito usual na teoria de controle é a representação diagramática.

Através dela podem-se estruturar os chamados diagramas de blocos. A figura 02 mostra a representação de um diagrama de blocos com três blocos distintos.

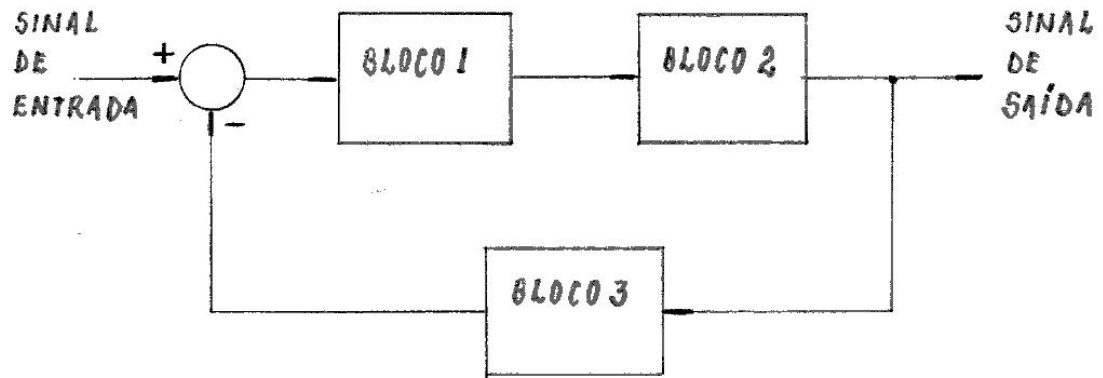


Figura 02 – Diagrama de blocos

Na representação de blocos são três os símbolos utilizados.

Bloco

Dentro do bloco é colocada a função de transferência do subsistema a que se refere.

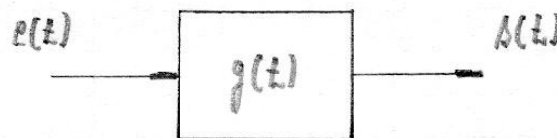


Figura 03 – Sistema com um bloco

Na figura 03 notar que, matematicamente:

$$S(t) = g(t) \cdot e(t) \quad (01)$$

Onde:

$S(t)$ – saída;
 $e(t)$ – entrada;
 $g(t)$ – função de transferência;
 t – variável independente tempo.

Notar que todas as variáveis do bloco da figura 03 dependem da variável tempo.

Somador

Usado para somar ou subtrair sinais quando se tem mais de um bloco.

A figura 04, seguinte, mostra um exemplo onde se tem dois blocos e duas funções a serem somadas.

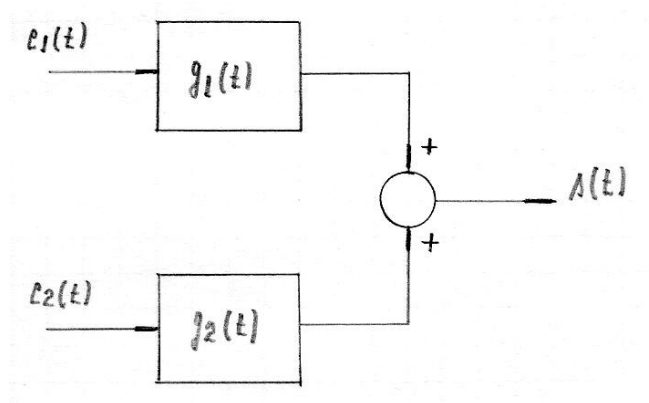


Figura 04 – sistema de controle com somador

Na figura 04 notar que, matematicamente:

$$S(t) = g_1(t) \cdot e_1(t) + g_2(t) \cdot e_2(t) \quad (02)$$

Onde:

$S(t)$ – saída;
 $e_1(t), e_2(t)$ – entrada;
 $g_1(t), g_2(t)$ – função de transferência;
 t – variável independente tempo.

Ponto de Retirada

Aparece sempre que o sinal de saída de um bloco ou de um somador vai servir como sinal de entrada em outro(s) bloco(s) e/ou somador(es) do diagrama geral.

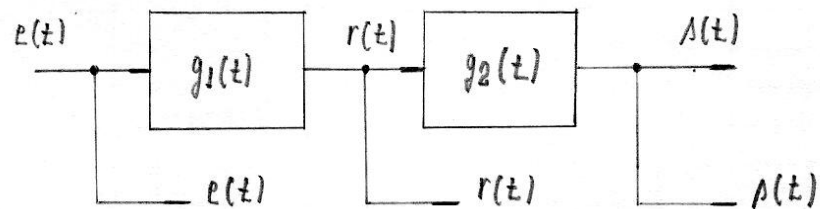


Figura 05 – Pontos de retirada

3. Álgebra de blocos

Consiste na operação matemática de funções regidas por blocos ou diagramas de blocos.

Um exemplo clássico trata-se do sistema regido por dois blocos sendo um deles de realimentação ou retroação como na figura 06.

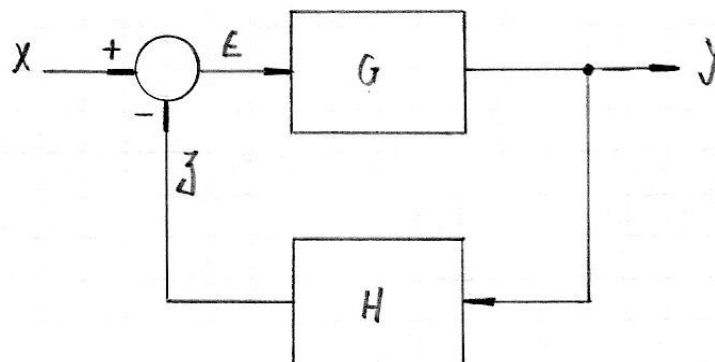


Figura 06 – Sistema de controle com realimentação

Na figura 06 deve-se considerar:

- x – variável de entrada;
- y – variável de saída;
- z – variável de realimentação;
- E – erro de controle;
- G – função de transferência de canal direto;
- H – função de transferência da realimentação.

Por definição, a relação entre a variável “ y ” de saída e a variável “ x ” de entrada é chamada de função de transferência do sistema de controle da figura 06.

Segue-se o equacionamento matemático para determinação da função de transferência do sistema da figura 06.

Do diagrama de blocos da figura 06 pode-se escrever as seguintes equações:

$$E = x - z \quad (03)$$

$$z = H \cdot y \quad (04)$$

$$y = G \cdot E \quad (05)$$

Da equação 05 tem-se que:

$$E = \frac{1}{G} y \quad (06)$$

Levando os valores de “ E ”, da equação 06, e de “ z ”, na equação 04, na equação 03, tem-se:

$$\frac{1}{G} y = x - H \cdot y \quad (07)$$

ou

$$\frac{1}{G} y + H \cdot y = x \quad \text{e} \quad y \left(\frac{1}{G} + H \right) = x$$

$$y \left(\frac{1+GH}{G} \right) = x \quad \text{e} \quad \frac{y}{x} = \frac{G}{1+GH}$$

Logo a função de transferência do sistema da figura 06 será:

$$FT = \frac{y}{x} = \frac{G}{1+GH} \quad (08)^1$$

“Pode-se então concluir que a função de transferência de qualquer sistema nada mais é que a relação entre o sinal de saída, deste sistema, e o sinal de entrada aplicado.”
 Notar que se as funções “y” e “x” variam no domínio da variável frequência a função de transferência também variará.

4. Classificação dos sistemas de controle

4.1. Sistema em malha aberta

É todo o sistema de controle que não possui malha de realimentação; ver figura 07.

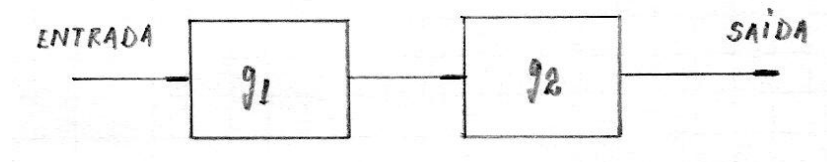


Figura 07 – Sistema em malha aberta

4.2. Sistema em malha fechada

Também conhecido como fecha malha é todo sistema de controle que possui, pelo menos, uma malha de realimentação; ver figura 08.

¹ FT – Abreviatura de função de transferência

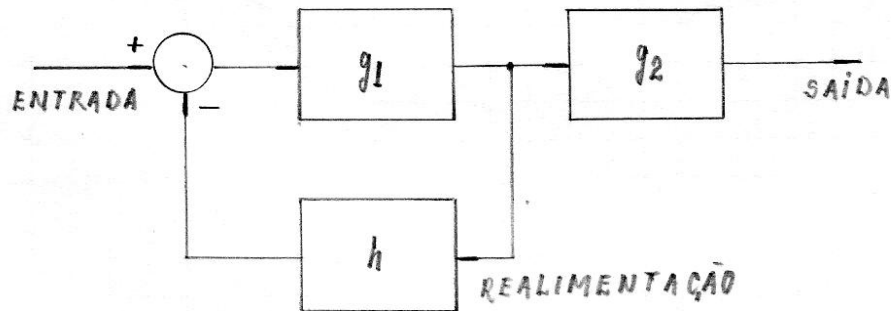


Figura 08 – Sistema em malha fechada

4.3. Sistema linear

No campo da engenharia uma das mais importantes classificações é a que define que um sistema é linear quando obedece ao chamado princípio da superposição que determina o seguinte.

Aplicando um sinal de entrada “ e_1 ” ao sistema enfocado obtém-se um novo sinal de saída “ s_1 ”.

Aplicando um sinal de entrada “ e_2 ” ao sistema enfocado obtém-se um novo sinal de saída “ s_2 ”.

Aplicando, agora, um sinal de entrada igual a soma de “ $e_1 + e_2$ ” o sinal de saída a ser obtido deverá ser o da soma “ $s_1 + s_2$ ”.

Um bom exemplo de sistema linear é o macaco hidráulico. Desconsiderando-se a compressibilidade do líquido há uma distribuição uniforme das pressões o que garante a linearidade do processo. Assim tem-se:

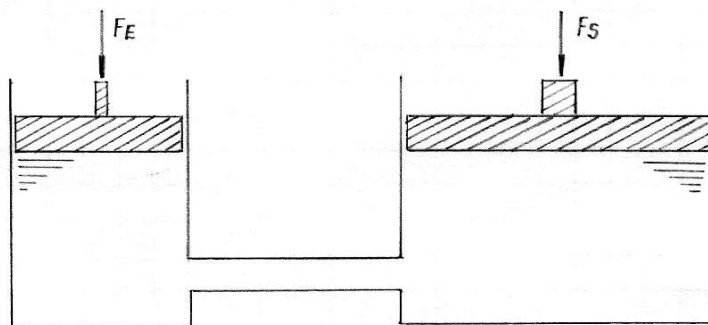


Figura 09A – Sistema macaco hidráulico

Na figura 9A tem-se:

- F_E – força de entrada aplicada;
- F_S – força de saída obtida.

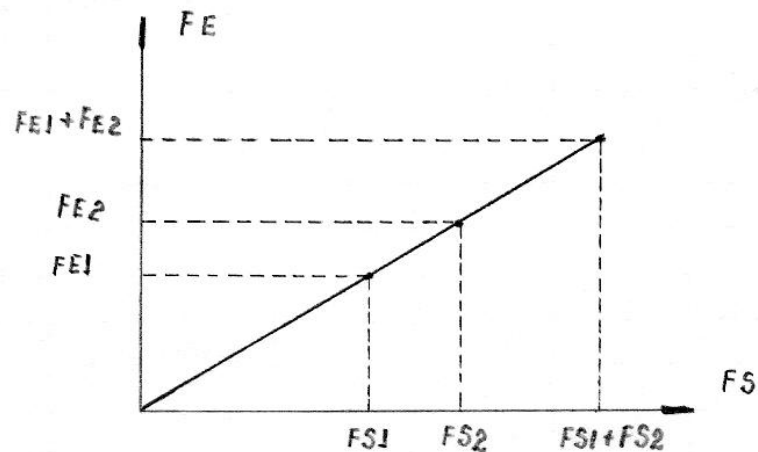


Figura 09B – Sistema linear do macaco hidráulico

4.4. Sistema não linear

Quando, a determinado sistema, é aplicado o princípio da superposição descrito no item 4.3 e este princípio não é respeitado o sistema é dito não linear.

Considerando a figura 10 obtém-se:

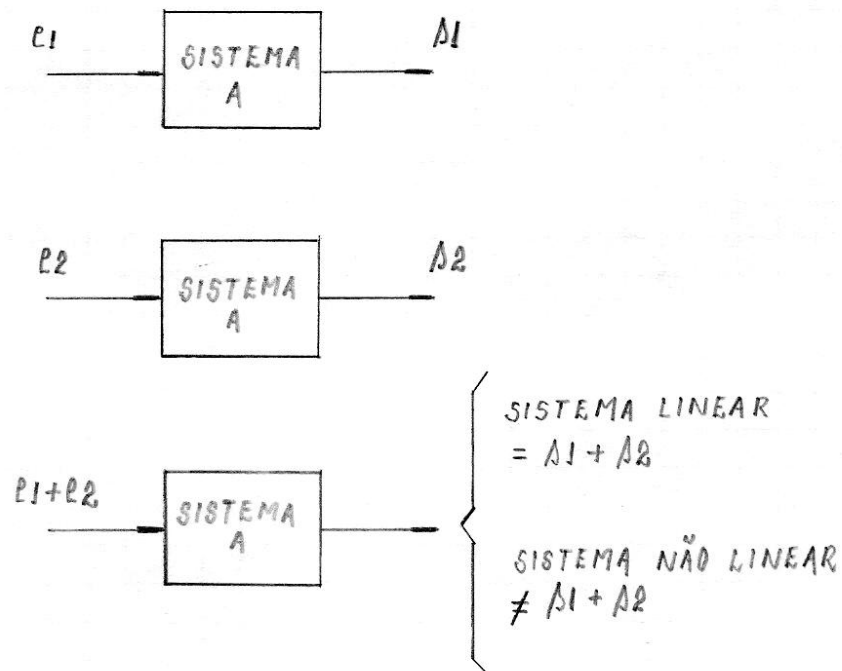


Figura 10 – Princípio da superposição

Como exemplo de um sistema não linear tem-se a lâmpada incandescente.

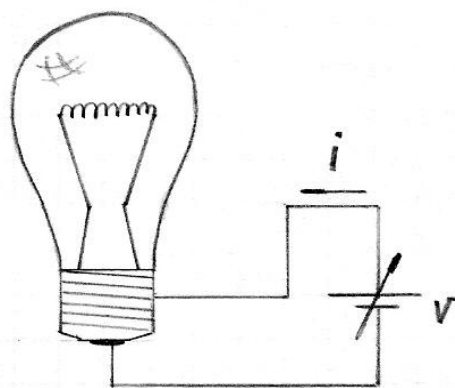


Figura 11A – Sistema lâmpada incandescente

Na figura 11A tem-se:

- i – corrente circulante;
- v – tensão variável.

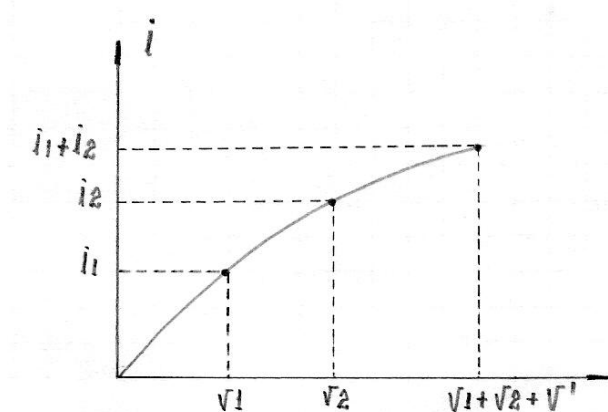


Figura 11B – Sistema não linear da lâmpada incandescente

Observar pela figura 11B que:

$$\begin{array}{ccc}
 i_1 & \longrightarrow & v_1 \\
 i_2 & \longrightarrow & v_2 \\
 i_1 + i_2 & \longrightarrow & v_1 + v_2
 \end{array}$$

Aqui nota-se que $v' \neq 0$ o que garante ser o sistema não linear: o princípio da superposição foi desobedecido.

Todos os sistemas de controle observados em sistemas de regulação apresentam elementos cujas funções de transferência são blocos constituídos de subsistemas lineares. As não-linearidades são definidas, por exemplo, pelos limites simples de saída das funções de transferência.

Como exemplo tem-se o caso do amplificador operacional; ver figura 12.

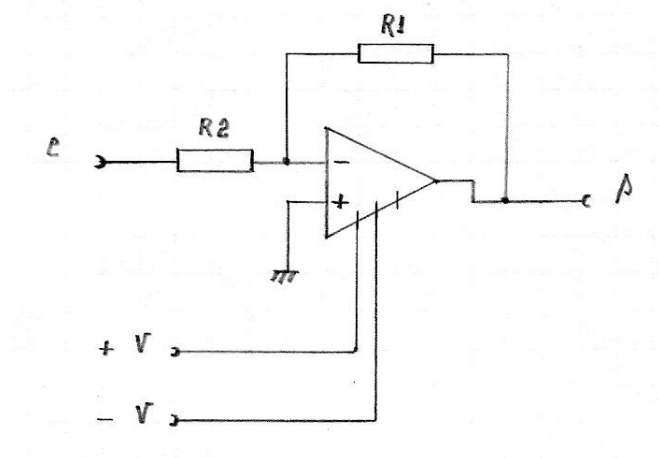


Figura 12 – Amplificador operacional com limites

O diagrama de blocos do sistema físico da figura 12 está estampado na figura 13.

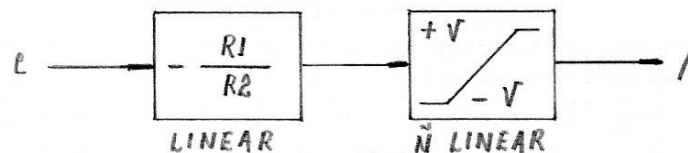


Figura 13 – Diagrama de blocos da figura 12

5. Conceituação matemática

5.1. Operações matemáticas

O modelo matemático é a mais importante representação para análise dos sistemas físicos existentes.

Basicamente o segredo da solução de qualquer problema físico existente consiste na solução de equações diferenciais que regem a mecânica funcional do sistema enfocado.

Na realidade tudo se inicia pela conceituação de funções.

5.2. Função

Toda função consiste na existência da aplicação de um determinado conjunto, previamente definido e chamado domínio da função, a outro conjunto, também definido e chamado contra-domínio da função, de modo que cada um dos elementos do domínio corresponda a apenas um elemento do contra-domínio.

Quando este condicionante de função não é obedecido diz-se ter uma relação.

As figuras 14 dão uma idéia da definição de função.

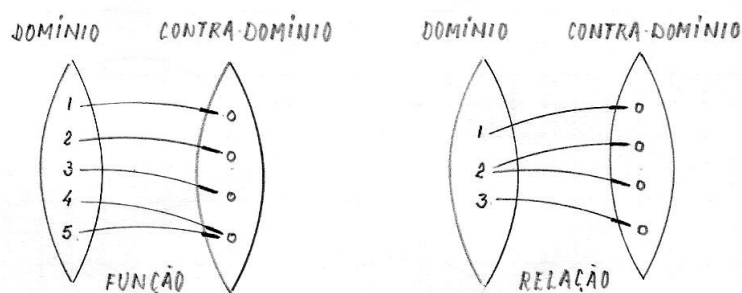


Figura 14A – Representação de função e de relação

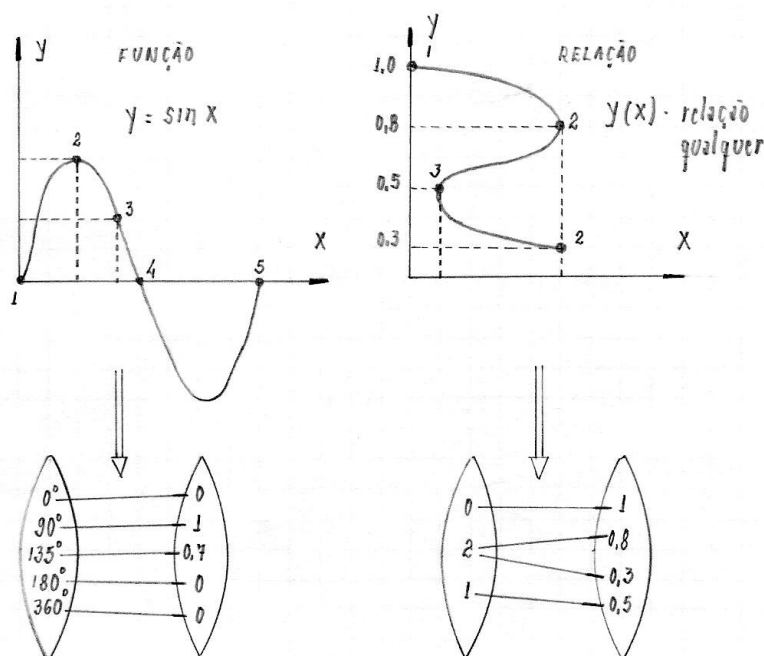


Figura 14B – Exemplos reais de conceituação de função

5.3. Limite de uma função

Com a definição do que se chama, em matemática, de função pode-se aplicar a esta a definição do que se chama limite de uma função.

Dada uma função qualquer $y = f(x)$ chama-se limite desta função o valor por esta assumido no seu contra-domínio quando se tende para um determinado valor no domínio.

Assim tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} y = \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \quad (09)$$

No cálculo do limite da função $y = f(x)$, da equação 09, deve-se saber que “y” é o contra-domínio da função e “x” o domínio da função.

Supondo, como exemplo, que se queira saber qual o valor do limite da função $y = f(x) = x$, uma reta que passa pela origem, para um valor $x = 2$.

Matematicamente, tem-se pela equação 09

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x$$

Bastará substituir o valor desejado de “x” em $\lim x$, ou melhor:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

Se a função fosse $y = f(x) = x^2$, uma parábola simétrica ao eixo “y” passando pela origem, ter-se-ia:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = (2)^2 = 4$$

Caso a função fosse $y = \sin x$, uma senóide, com “x” em graus:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [\sin x] = \sin(2^\circ) \cong 0,0349$$

A determinação do limite é muito importante, em matemática, quando se trabalha com séries infinitas e se quer saber seu valor quando a tendência é infinita porque muitas vezes o valor dos termos da série vai convergindo, ou seja, o valor de um termo de ordem infinita seria finito.

A figura 15 dá uma boa idéia da operação limite

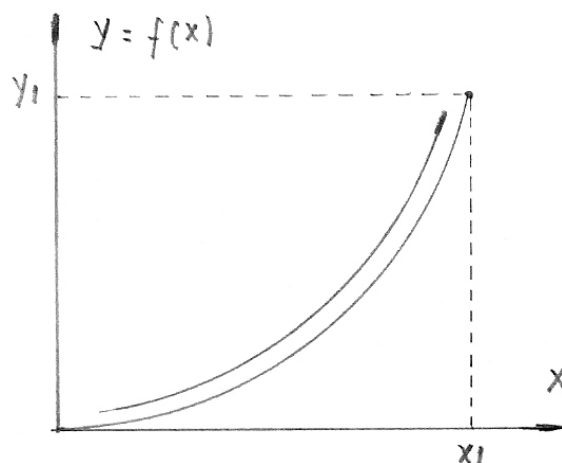


Figura 15 – Representação do limite de uma função

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = y_1 \quad (10)$$

Em matemática já se calcularam os limites de certas funções básicas. São os chamados limites fundamentais cujo cálculo utilizado foi de grande maestria.

É o caso dos limites seguintes:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

No segundo limite “e” é a base dos logaritmos neperianos e vale:

$$e = 2,71828182818281...$$

Como observação vale lembrar que para uma função qualquer $y = f(x)$ “y” representa o contra-domínio enquanto “x” representa o domínio da função. “x” é conhecido como variável independente e “y” como variável dependente de “x”.

Na física, normalmente, a variável “x” representa o tempo.

5.4. Derivada de uma função

Conhecendo o que se quer dizer como limite de uma função pode-se, também, representá-lo como segue para função “ $f(x)$ ”.

$$\lim_{x \rightarrow x} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x - \Delta x) \quad (11)$$

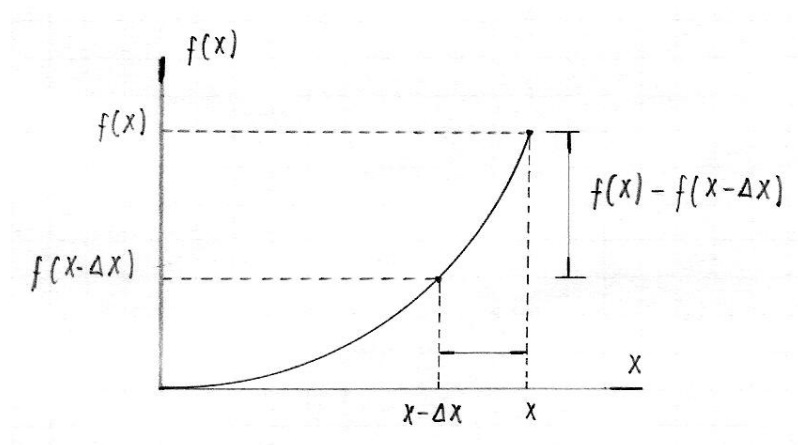


Figura 16 – Outra representação do limite de uma função

“Chama-se de função derivada de uma função qualquer o limite do quociente ditado pela expressão seguinte e simbolizado por $\frac{d}{dx} f(x)$ ”.

Logo:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (12)$$

O símbolo “ $\frac{d}{dx}$ ” indica que se está derivando alguma função em relação a variável independente “ x ”. Assim “ $\frac{d}{dx} f(x)$ ” significa que se está derivando a função “ $f(x)$ ” com relação a “ x ”.

A relação $\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$ da equação 12 é universalmente conhecida como “quociente de Newton” e tem a característica da função tangente trigonométrica.

Representando, novamente, a figura 16 tem-se:

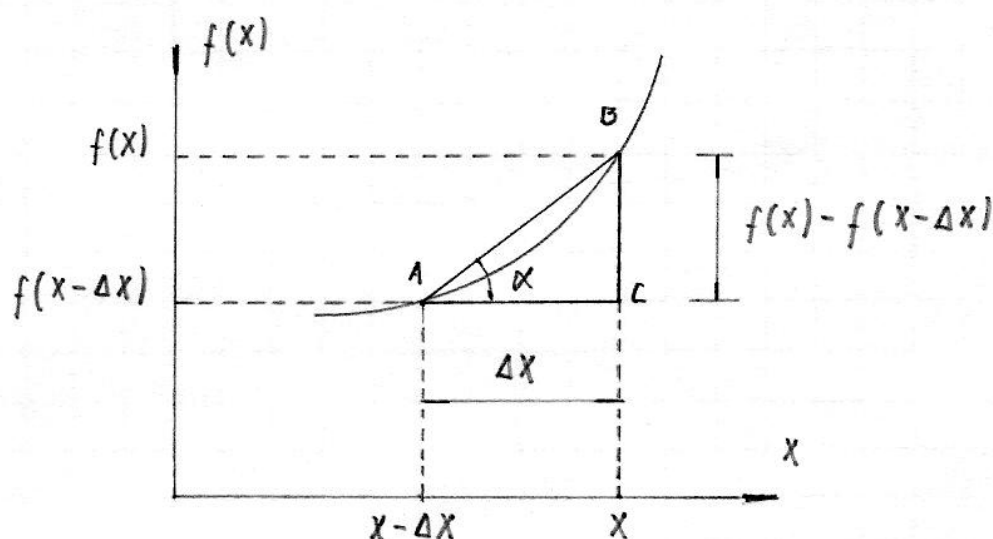


Figura 17 – Representação da derivada de uma função

Notar pela figura 17 que:

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (13)$$

Quando, no limite, $\Delta x = 0$ tem-se o valor da função " $f(x)$ " no ponto "B" do gráfico da figura 17.

Logo:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) = \tan \alpha \quad (14)$$

Graficamente tem-se:

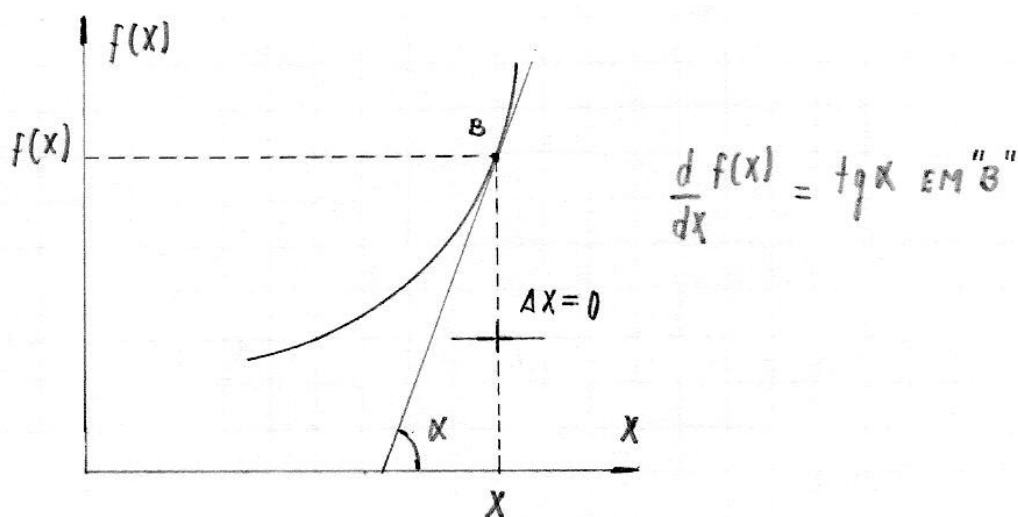


Figura 18 – Outra representação da derivada de uma função

5.5. Equações diferenciais

Uma equação é dita diferencial quando possui a função derivada entre suas parcelas.

Como exemplo tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 3y_2 = 5 \quad (15)$$

A equação 15 é uma equação diferencial.

Uma função pode ser derivada mais de uma vez. Quando isto ocorre diz-se que a equação diferencial é de ordem dois, três, etc, dependendo se a função for derivada duas, três, etc, vezes, respectivamente.

- Exemplo de equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 \quad (16)$$

- Exemplo de equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + y = 2$$

Ou então

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2 \quad (17)$$

- Exemplo de equação diferencial de ordem “n”:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + y = 2 \quad (18)$$

5.6. Solução de equações diferenciais

Seja uma equação diferencial de primeira ordem ou ordem um.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (19)$$

A equação 19 é uma equação diferencial porque possui pelo menos uma derivada. É uma equação diferencial de primeira ordem porque a derivada de maior ordem foi realizada apenas uma vez.

Lembrar que “y” representa o contra-domínio e “x” o domínio da função $y = f(x)$.

Para solução chamar de “D” o operador derivada em “x”.

Logo:

$$D = \frac{d}{dx} \quad (20)$$

Levando o valor de “D”, operador derivada, na equação 19 tem-se:

$$Dy + 2y = 0 \quad (21)$$

Caso a equação fosse de segunda ordem ter-se ia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 0 \quad (22)$$

com $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$

Deste modo a equação 22 ficará:

$$D^2 y + 2y = 0$$

Para a solução da equação 21 segue-se o procedimento:

$$Dy + 2y = 0 \quad (23)$$

$$(D+2)y = 0$$

Como $y \neq 0$ pois para $y = 0$ tem-se solução trivial vem:

$$D+2=0 \quad \therefore \quad D=-2 \quad (24)$$

Prova-se que a solução da equação diferencial ditada pela equação 23 será:

$$y = K \cdot e^{-2x} \quad (25)$$

Onde:

K – constante a determinar;
e – base dos logaritmos neperianos.

As soluções de equações diferenciais de sistemas lineares serão sempre equações proporcionais a combinação da função exponencial “ e^x ”.

O gráfico da função da equação 25 encontra-se estampado na figura 19.

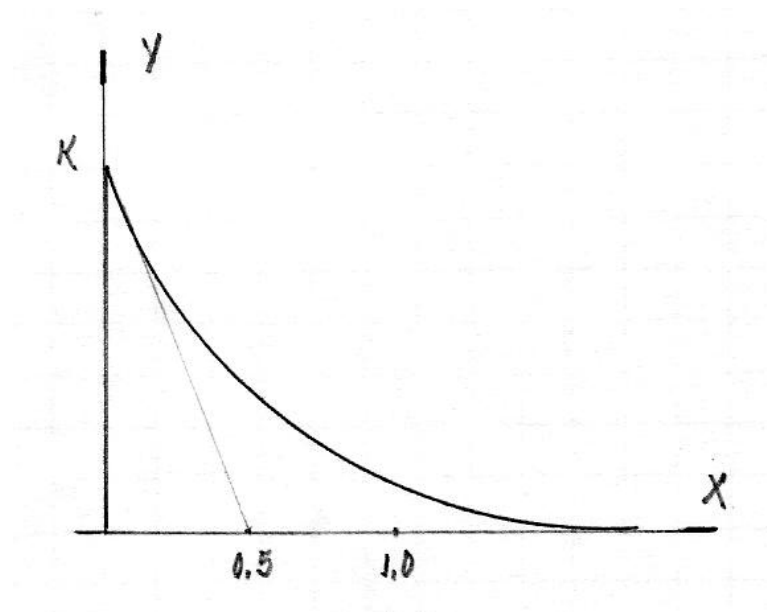


Figura 19 – Função $y = K \cdot e^{-2x}$

A equação 24 é a equação característica de um sistema físico de primeira ordem porque ela é uma equação diferencial de primeira ordem cuja solução forneceu a raiz -2 .

Se a função do gráfico da figura 19 tivesse para “ K ” o valor 1, ter-se ia:

$$y = K \cdot e^{-2x}$$

O novo gráfico seria:

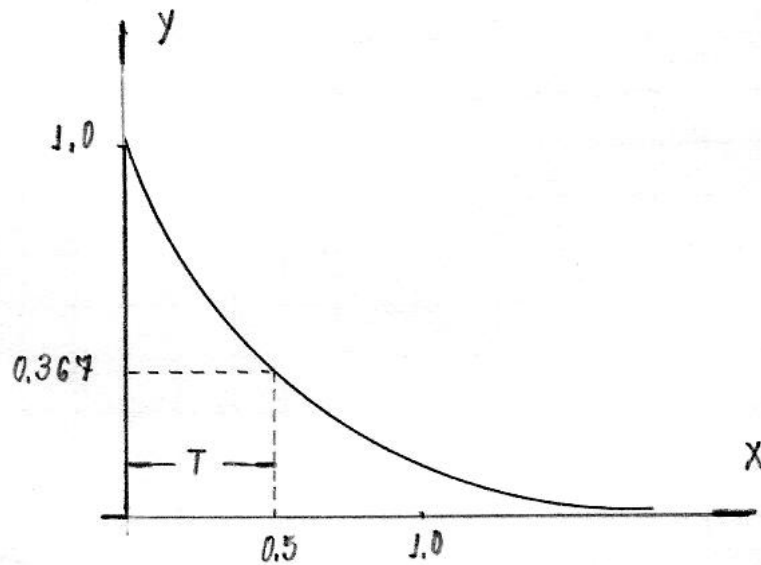


Figura 20 – Função $y = e^{-2x}$

Para $x = \frac{1}{2}$

$$y = e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{-1}$$

ou

$$y = 0,367$$

A distância “T” medida no eixo “x” é conhecida como constante de “x”. Como a variável independente “x”, nos sistemas físicos, é quase sempre o tempo a distância “T” é conhecida como “constante de tempo” do sistema regido pela equação diferencial 19.

O número de constantes de tempo de um determinado sistema depende exclusivamente da ordem da equação diferencial que rege este sistema.

No caso presente, por ser um sistema de primeira ordem, existe apenas uma constante de tempo.

Generalizando o sistema descrito pela equação diferencial de primeira ordem 19 pode-se escrever a resposta deste sistema como sendo:

$$y = K \cdot e^{\frac{-t}{T}} \quad (26)$$

Onde:

K – ganho;

T – constante de tempo.

A equação diferencial cuja solução está representada na equação 26 é a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} + \omega y = 0 \quad (27)$$

5.7. Integral de uma função

No item 5.4, anteriormente estudado, fez-se uma explanação a cerca da derivada de uma função.

Pela equação 14 soube-se que a derivada de uma função qualquer podia ser expressa pela equação:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (28)$$

Na equação prévia a variável independente é o tempo “t” ao invés de “x”.

Assim criou-se, a partir da função “f(t)” uma outra função, a função derivada de “f(t)” representada por “ $\frac{d}{dx} f(t)$ ”.

Chamando de “g(t)” a função “f(t)” tem-se que:

$$g(t) = \frac{d}{dt} f(t) \quad (29)$$

Agrupando as diferenciais “d” da equação 29 tem-se que:

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

Isolando a diferencial “df(t)” tem-se:

$$g(t) \cdot dt = df(t) \quad (30)$$

Notar que a equação 30 nada mais é que uma equação diferencial.

Melhorando-se vem:

$$df(t) = g(t) \cdot dt \quad (31)$$

Caso se queira o valor da função “ $f(t)$ ”, original, é só integrá-la, ou seja, somar todas as diferenciais infinitamente pequenas nas quais a função foi dividida.

Assim simbolicamente tem-se:

$$f(t) = \int g(t) \cdot dt \quad (32)$$

Notar que as operações de derivação e de integração de funções são inversas entre si. Na derivação uma função é reduzida a um ponto único enquanto que na integração a soma dos incrementos faz-se obter a função original que fora decomposta em pequenos incrementos.

O símbolo “ $\frac{d}{dt}$ ” divide uma função relativa ao tempo “ t ”, enquanto que o símbolo “ $\int$ ” soma as divisões da função recompondo-a novamente.

Como exemplo de uma equação genérica em que apareçam derivada, integral além da própria função, tem-se:

$$y + \frac{dy}{dt} + \int y \cdot dt = 0 \quad (33)$$

A equação 33 possui uma função “ y ” que varia com o tempo “ t ”.

Possui, também, uma derivada da função “ y ” como relação a variável “ t ” e possui uma integral da função “ y ” no domínio do tempo.

Para a representação da equação 33 através de operadores tem-se:

- Para a parcela $y \rightarrow D^0 y \rightarrow$ ordem zero
- Para a parcela $\frac{dy}{dt} \rightarrow D^1 y \rightarrow$ ordem um
- Para a parcela $\int y \cdot dt \rightarrow \frac{1}{D} y = D^{-1} \rightarrow$ ordem um negativo

Assim a equação , sob a forma de operadores, terá o seguinte aspecto:

$$D^0 y + Dy + \frac{1}{D} y = 0 \quad (34)$$

Para preparar a equação 34, visando à obtenção de sua solução, deve-se multiplicar membro a membro pelo operador “ D ”.

Assim a equação 34 fica:

$$D \left(D^0 y + Dy + \frac{1}{D} y \right) = D \cdot 0 \quad (35)$$

Ou melhor

$$Dy + D^2y + y = 0$$

ou

$$(D^2 + D + 1)y = 0 \text{ com } y \neq 0^2 \quad (36)$$

A equação 36 consiste na forma preparada para se encontrar a solução da equação genérica 33.

Resolvendo a equação de segunda ordem na variável “D” encontram-se duas raízes que vão compor a resposta-solução desta equação genérica. Notar que a equação diferencial resultante é de segunda ordem.

Conclui-se que mesmo no aparecimento de integrais dentro de uma equação diferencial esta ainda poderá ser transformada em uma equação puramente diferencial com a pré e pós multiplicação de operadores “D” até que não apareçam mais operadores elevados a expoentes negativos, ou do tipo, “ $\frac{1}{D}, \frac{1}{D^2}, \frac{1}{D^3}, \dots$ ”

5.8. Levantamento da função de transferência de um sistema linear considerando o domínio complexo

As representações diagramáticas em forma de blocos com suas FTs permitem o conhecimento e a identificação de todas as características operacionais de um dado sistema.

Geralmente as FTs agrupam as relações entre as funções no que se chama domínio complexo ou da “transformada de Laplace”.

Os procedimentos para a solução de uma equação diferencial podem seguir os seguintes critérios:

- Clássico usando o método de Heaviside (funções polinomiais);
- Via transformação de Laplace;
- Clássico usando técnicas notáveis;
- Via cálculo numérico (computação).

O critério visto previamente foi aquele ligado ao método de Heaviside ou operador “D”.

Na realidade o método de Heaviside e o método de Laplace são os mesmos nas conclusões finais pois em suas aplicações sempre se utiliza do conceito operacional.

Notar que pelo critério de Laplace a variável operador é identificada pela letra “S” enquanto que pelo critério de Heaviside a variável operador é a letra “D”.

Na realidade o problema é bem mais complexo que uma simples escolha de letra uma vez que a comprovação de Laplace apresenta um cunho caracterizado pelo “rigor matemático” enquanto que a solução de Heaviside apresenta uma característica heurística, ou seja, de fraca comprovação matemática.

² Lembrar que a solução trivial $y = 0$ não interessa.

Apesar disto, as conclusões são as mesmas. Sobre os outros dois processos mencionados pode-se afirmar que o clássico, utilizando técnicas notáveis, não resolve todas as equações enquanto que o numérico é utilizado na computação digital.

Atualmente este último método vem sendo utilizado de modo exaustivo devido à difusão da informática aplicada a problemas reais.

Convém lembrar que as técnicas de solução das equações diferenciais apresentadas nesta pequena obra se referem a equações diferenciais lineares de coeficientes constantes.

Será apresentado um exemplo de cálculo de uma FT de um sistema elétrico, um circuito RLC-Série, caracterizado por uma equação diferencial de segunda ordem, portanto admitindo para solução destas duas raízes.

A extrapolação da técnica de operadores é facilmente entendida no nível da transformação de Laplace.

Seja o circuito abaixo cuja FT se deseja levantar:

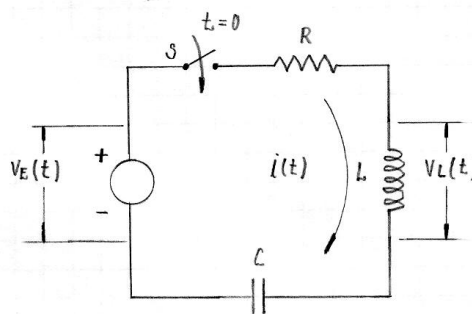


Figura 21 – Circuito RLC-Série

O circuito da figura 21 é um circuito RLC-Série porque os três elementos passivos, o resistor “R”, o indutor “L” e o capacitor “C” estão ligados em série pois, ao se fechar a chave “S”, no instante $t = 0$, circulará uma corrente “ $i(t)$ ”, variável no domínio do tempo, que passa a existir devido a ação da fonte “ $V_E(t)$ ”, também variável no domínio do tempo.

Para equacionar o circuito deve-se, primeiramente, conhecer o que se quer do problema e do que se dispõe.

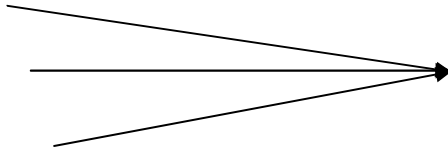
Se quer a relação $\frac{V_L(t)}{V_E(t)}$, ou seja, a função de transferência desejada. Dispõe-se de um

sistema básico de somatórias em tensões, ou melhor, somatória das quedas de tensões nos elementos passivos.

Considerando não haver perdas, a tensão aplicada pela fonte, o elemento ativo do circuito, deverá ser igual à soma das quedas de tensão nos três elementos passivos do circuito.

Prova-se que a queda em cada um dos elementos passivos em função da corrente circulante é dada por:

- Resistor $R \rightarrow V_R(t) = R \cdot i(t)$
- Indutor $L \rightarrow V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
- Capacitância $C \rightarrow V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt$


(37)

A primeira equação para o circuito RLC-Série será relativa à soma das quedas de tensões como mencionado previamente.

Assim tem-se:

$$V_E(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt \quad (38)$$

Pode-se perguntar de onde vieram estas equações? Elas, na realidade, foram resultadas de um número grande de pesquisas.

A primeira parcela, “ $R \cdot i(t)$ ” nada mais é que a “Lei de Ohm”; a segunda “ $L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ ” nada

mais é que a “Lei de Lenz” enquanto que a terceira parcela “ $\frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt$ ” vem associada aos estudos da eletrostática.

Vê-se, claramente, que a equação 38 está definida de modo que todas as suas variáveis dependam da variável tempo.

Logo diz-se que a equação 38 encontra-se no domínio do tempo, ou seja, na forma “ $f(x)$ ”.

Aplicando a técnica de Heaviside via operador “D” tem-se:

$$V_E(D) = R \cdot i(D) + L \cdot D \cdot i(D) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{D} \cdot i(D) \quad (39)$$

Lembrando-se que:

- $\frac{df}{dt} = Df$
- $\int f \cdot dt = \frac{1}{D} f$

Assim, multiplicando a equação 39 por “D”, tem-se:

$$D \cdot V_E(D) = R \cdot D \cdot i(D) + L \cdot D^2 \cdot i(D) + \frac{1}{C} \cdot i(D)$$

ou melhor:

$$D \cdot V_E(D) = \left(LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) i(D) \quad (40)$$

Isolando as variáveis em corrente e em tensão, dentro da equação 40, tem-se:

$$\frac{i(D)}{V_E(D)} = \frac{D}{LD^2 + RD + \frac{1}{C}}$$

Melhorando obtém-se:

$$\frac{i(D)}{V_E(D)} = \frac{CD}{LCD^2 + RCD + 1} \quad (41)$$

Uma importante observação pode ser feita agora! A equação 38 consiste na equação diferencial que amarra as variáveis tensão “ V_E ” e corrente circulante “ i ”, porém ambas como função do tempo “ t ”.

Já a equação 39 é a mesma equação, porém transformada para o domínio complexo na variável “ D ”.

Analogia:

Domínio do tempo		Domínio complexo ³
$V_E(t)$	→	$V_E(D)$
$i(t)$	→	$i(D)$
R	→	R
L	→	LD
C	→	$\frac{1}{CD}$
$\frac{df}{dt}$	→	Df
$\int f \cdot dt$	→	$\left(\frac{1}{D} \right) f$

Do circuito RLC-Série sabe-se que apenas a queda de tensão no indutor vale, pelas equações 37, no domínio do tempo:

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (42)$$

³ O nome complexo significa que a variável “ D ” pode assumir a forma de um número complexo do tipo $a + jb$

Passando, também, a equação 42 para o domínio do complexo tem-se:

$$V_L(D) = L \cdot D \cdot i(D)$$

ou melhor:

$$i(D) = \frac{1}{LD} V_L(D) \quad (43)$$

As equações transformadas para o domínio complexo, 41 e 43, resolvem o problema; bastará levar o valor da expressão de “ $i(D)$ ” da equação 43 na equação 41.

$$\frac{1}{LD} \cdot \frac{V_L(D)}{V_E(D)} = \frac{CD}{LCD^2 + RCD + 1}$$

ou melhor:

$$\frac{V_L(D)}{V_E(D)} = \frac{LCD^2}{LCD^2 + RCD + 1} \quad (44)$$

Assim a função de transferência pedida, no domínio complexo, ou no domínio da transformada “D”, ou no domínio da transformada de Laplace nada mais é que a relação “ $\frac{V_L(t)}{V_E(t)}$ ” da expressão 44.

Na literatura também é utilizado o símbolo “S” para a variável operador. Assim a função de transferência pedida que tem como saída a tensão aplicada ao elemento indutor, em função da tensão aplicada pela fonte, será:

$$FT = \frac{V_L(S)}{V_E(S)} = \frac{LCS^2}{LCS^2 + RCS + 1} \quad (45)$$

O circuito da figura 21 está representado no domínio do tempo. Caso se queira representá-lo no domínio complexo ter-se-ia:

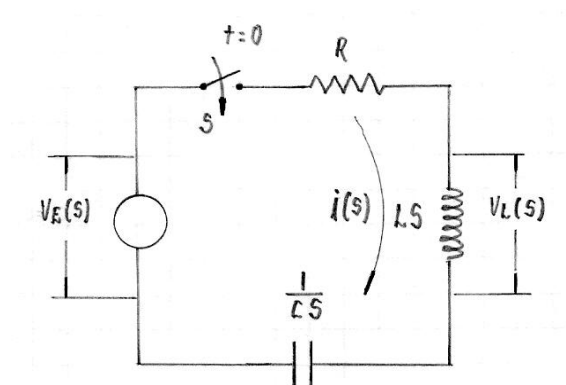


Figura 22 – Circuito RLC-Série no domínio complexo

A grande vantagem da análise complexa é verificar, por exemplo, o comportamento da tensão aplicada ao indutor quando se varia a tensão de entrada aplicada pela fonte.

Outra conclusão importante que se pode tirar refere-se às definições de ganho e de fase de uma FT.

Observando bem a equação transformada 45, nota-se que a FT é uma função que possui um módulo e uma fase. O que determina a variação do ganho ou da fase desta será o valor do operador “S”, complexo.

O operador complexo poderá ser substituído pelo número complexo puro “j ω ” onde $\omega = 2\pi f$ (f – frequência em Hz) e $j = \sqrt{-1}$.

Deste modo tem-se:

$$FT(j\omega) = \frac{V_L(j\omega)}{V_E(j\omega)} = \frac{LC(j\omega)^2}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

Como $j^2 = -1$ tem-se:

$$FT(j\omega) = \frac{V_L(j\omega)}{V_E(j\omega)} = \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$$

ou melhor

$$\frac{V_L(j\omega)}{V_E(j\omega)} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (46)$$

Como se pode ver pela equação 46, a FT obtida é também um número complexo garantindo o que foi dito antes sobre a existência de um ganho e de uma fase para a função.

Deste modo a um determinado sinal de entrada " $V_E(j\omega)$ " corresponderá um sinal de saída que deverá ser proporcional a este primeiro, porém com defasamento no argumento (fase).

Pela equação 46 pode-se, também, concluir que o ganho e a fase da FT variam dentro de um espectro que é chamado, na teoria de controle, de banda de frequência.

Assim percebe-se, claramente, sob que faixas de frequência do sinal de entrada o sinal de saída aparecerá.

Conforme os valores assumidos pela frequência do sinal de entrada, mesmo que sua amplitude seja alta, poderá o sinal de saída ser amplificado ou atenuado.

Através destas características é que são projetados todos os filtros e dispositivos atenuantes ou amplificadores em engenharia.

5.9. Cálculo do ganho e da fase de uma determinada FT

Como visto anteriormente sabe-se que toda FT nada mais é que um número complexo possuindo, com isto, um ganho e uma fase.

Sabendo-se, também, que esta FT é uma função linear o cálculo de ganho e de fase desta função é possível utilizando-se da matemática.

Seja a determinação do ganho e da fase de um sistema caracterizado por um circuito RC-Série a partir do cálculo de sua FT.

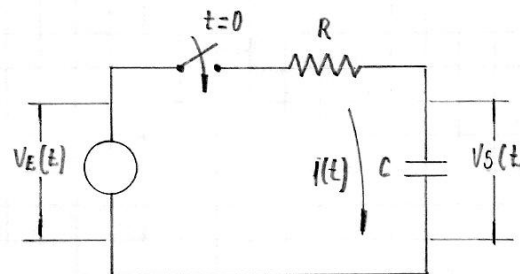


Figura 23 – Circuito RC-Série no domínio do tempo

Na figura 23 a tensão " $V_E(t)$ ", no domínio do tempo, é aplicada ao circuito pelo fechamento da chave no instante $t = 0$. Isto significa que o circuito encontra-se desenergizado no instante $t = 0$ e que a contagem no eixo do tempo se iniciará a partir do fechamento da chave.

Para o caso supõe-se que se queira conhecer qual a tensão de saída sobre o capacitor "C" quando se aplica um sinal de tensão " $V_E(t)$ " sobre o circuito.

5.9.1. Cálculo da FT do circuito RC-Série

Seja a construção do circuito transformado “D” ou “S”.

Domínio do tempo		Domínio complexo
$V_E(t)$	→	$V_E(S)$
$V_S(t)$	→	$V_S(S)$
R	→	R
C	→	$\frac{1}{CS}$
$\frac{d}{dt}$	→	S

O circuito transformado será:

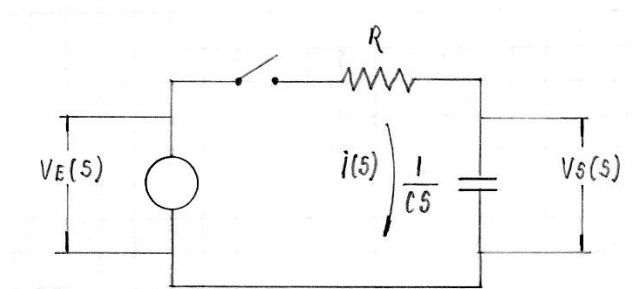


Figura 24 – Circuito RC-Série no domínio complexo

As equações envolvidas após o instante de fechamento da chave serão:

$$V_E(S) = \left(R + \frac{1}{CS} \right) \cdot i(S) \quad (47)$$

e

$$V_S(S) = \frac{1}{CS} i(S) \quad (48)$$

As duas equações prévias resolvem o problema.

Da equação 48 tira-se $i(S) = CS \cdot V_S(S)$ que levada na equação 47 fornece:

$$V_E(S) = \left(R + \frac{1}{CS} \right) CS \cdot V_S(S)$$

ou melhor

$$V_E(S) = \frac{RCS + 1}{CS} \cdot CS \cdot V_S(S)$$

ou

$$\frac{V_S(S)}{V_E(S)} = \frac{1}{1 + RCS} \quad (49)$$

Assim fica determinada a FT do sistema RC-Série da figura 24 no domínio complexo ou do operador “S” (ou “D”).

Notar que o produto “RC” tem a dimensão física de tempo, ou seja:

$$R[K\Omega] \cdot C[\mu F] = RC[ms] \quad (50)$$

Prova-se que “RC” nada mais é que a constante de tempo do circuito. Notar que o denominador da FT é originário de uma equação diferencial, no domínio do tempo, de primeira ordem apresentando, por tal, uma raiz solução e, portanto, uma constante de tempo.

Para se voltar ao domínio do tempo é só efetuar as operações, senão veja:

$$V_S(S) = \frac{1}{1 + TS} \cdot V_E(S) \quad \text{com } T = RC \quad (51)$$

$$V_S(S) \cdot (1 + TS) = V_E(S)$$

$$V_S(S) + V_S(S) \cdot TS = V_E(S)$$

$$TS \cdot V_S(S) + V_S(S) - V_E(S) = 0 \quad (52)$$

Fazendo $V_S(S) = Y(S)$ e $V_E(S) = Z(S)$ tem-se para equação 52 que:

$$TS \cdot Y(S) + Y(S) - Z(S) = 0 \quad (53)$$

Voltando ao domínio do tempo tem-se:

Domínio complexo		Domínio do tempo
S	$\longrightarrow$	$\frac{d}{dt}$
T	$\longrightarrow$	T
$Y(S)$	$\longrightarrow$	$Y(t)$
$Z(S)$	$\longrightarrow$	$Z(t)$

Logo a equação 53, no domínio do tempo, será:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + Y(t) - Z(t) = 0 \quad (54)$$

Para o caso em que $Z(t) = 0$ tem-se:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + Y(t) = 0 \quad (55)$$

Notar que a equação 55 nada mais é que uma equação diferencial de primeira ordem caracterizada por possuir uma derivada e cuja solução fornece via operador:

$$(TS + 1)Y = 0$$

A raiz solução vale $S = \frac{-1}{T}$, ou seja, o inverso da constante de tempo.

Voltando à equação 5,1 para o cálculo do ganho, é só considerar a FT como seguinte:

$$\frac{V_s(S)}{V_E(S)} = \frac{1}{1 + TS} \quad (56)$$

Fazendo o operador “S” igual a um número complexo puro “j ω ”, dependente da frequência complexa “ ω ”, tem-se:

$$G = \text{Módulo} \left[\frac{V_S(S)}{V_E(S)} \right]_{S=j\omega} = \left| \frac{V_S(j\omega)}{V_E(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{1+T(j\omega)} \right|$$

$$G = \left| \frac{1}{1+jT\omega} \right| \quad (57)$$

Lembrando que: dado um número complexo na forma cartesiana, $z = a + jb$ onde $j = \sqrt{-1}$, sua forma polar será:

$$z = a + jb \rightarrow \text{cartesiana} \quad (58)$$

$$z = \rho \angle \theta \rightarrow \text{polar} \quad (59)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (60)$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad (61)$$

A representação do número complexo será a seguinte:

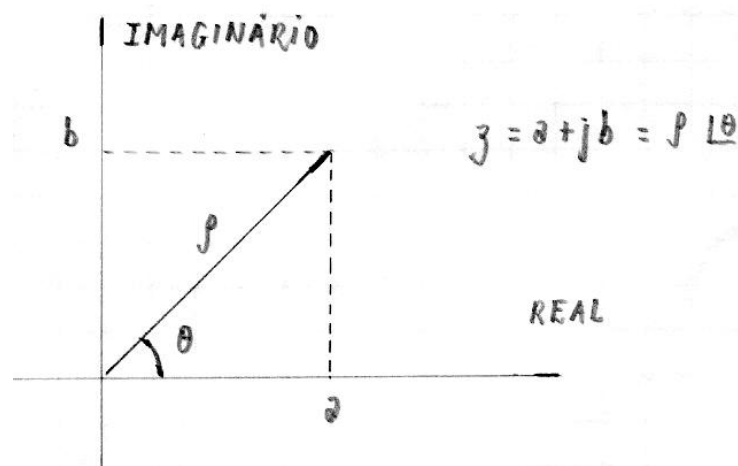


Figura 25 – Digrama para o número complexo

Sendo “G” o módulo do número complexo, equação 57, pode-se escrever:

$$G = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

ou melhor

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

E em “dB” (decibel) tem-se:

$$G = -20 \log(\sqrt{1 + T^2 \omega^2}) \quad (62)$$

Para a fase “ θ ” tem-se que deixar a equação 57, que está na forma $\frac{1}{a + jb}$, na forma $a + jb$.

Usa-se o artifício seguinte:

$$z = \frac{1}{a + jb} \left(\frac{a - jb}{a - jb} \right) = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$$

ou melhor

$$z = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

ou

$$z = A + jB \quad (63)$$

onde $A = \frac{a}{a^2 + b^2}$

e $B = \frac{-b}{a^2 + b^2}$

Logo

$$\frac{1}{a + jb} \equiv \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (64)$$

Aplicando a teoria da equação 64 na equação 57 tem-se

$$G = \left| \frac{1}{1 + jT\omega} \right| = \left| \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2} \right|$$

e

$$G = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + T^2\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2} \right)^2} \rightarrow \text{Ganho} \quad (65)$$

com

$$\tan\theta = -\frac{\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}}{\frac{1}{1 + T^2\omega^2}} = -T\omega$$

ou

$$\tan\theta = -T\omega \rightarrow \text{Fase} \quad (66)$$

Logo as equações 65 e 66 representam o ganho e a fase do sinal de tensão de saída do capacitor, “ V_S ”, com relação ao sinal de tensão de entrada, “ V_E ”, ambas em função da frequência complexa.

Pode-se, portanto, explicar porque motivo certos sistemas respondem bem a determinados sinais numa frequência e não respondem nada a esses mesmos sinais em outras frequências.

5.10. Resposta no domínio do tempo

Considerando-se a figura 23. Se for aplicado, como sinal de entrada “ V_E ”, um sinal qualquer, por ser este um sistema linear, a saída será proporcional dando como resultado um sinal também qualquer.

Caso seja aplicado um degrau de tensão, sinal especial, o sinal de saída sofrerá uma distorção, transitória, porém o acompanhará.

Assim tem-se:

$$V_E(t) = K \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ K & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (67)$$

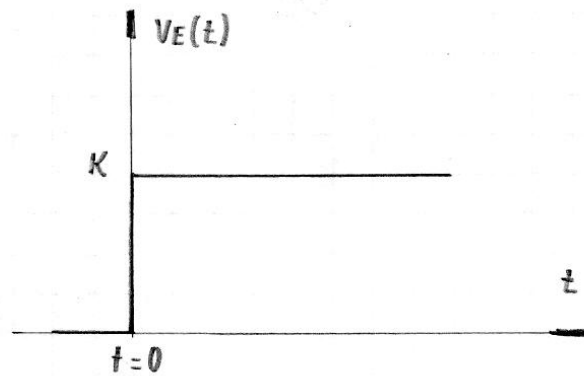


Figura 26 – Gráfico da função degrau no domínio do tempo

Assim tem-se:

Domínio complexo

$$V_E(t) = K$$

Domínio do tempo

$$V_E(S) = \frac{K}{S} \quad (68)$$

Na equação 51, com o valor $V_E(S) = \frac{K}{S}$, tem-se:

$$V_S(S) = \left(\frac{1}{1+TS} \right) \cdot \frac{K}{S}$$

ou melhor

$$V_S(S) = \frac{K}{S(1+TS)} \quad (69)$$

Deste modo obtém-se a resposta da tensão de saída do capacitor “C” quando é aplicado um degrau de tensão de entrada “ V_E ”.

A resposta da equação 69 não dá para analisar nada de modo visual pois se encontra no domínio complexo. Para se voltar ao domínio do tempo bastará consultar uma tabela de transformação de Laplace. Nesta tabela encontra-se o seguinte:

Domínio do tempo (t)

Domínio complexo (S)

$$f(t) = K(1 - e^{at}) \qquad F(S) = \frac{\frac{K}{a}}{S(S+a)} \qquad (70)$$

Observando a equação 69 obtém-se que:

$$V_s(S) = \frac{\frac{K}{T}}{S\left(S - \frac{1}{T}\right)} \qquad (71)$$

Comparando as equações 70 e 71, finalmente obtém-se a resposta no domínio do tempo, ou seja, com $a = -\frac{1}{T}$ (frequência de esquina).

$$V_s(T) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \qquad (72)$$

Caso se queira plotar o gráfico da tensão “ $V_s(t)$ ”, de saída do capacitor, como resposta ao degrau da tensão, “ $V_E(t)$ ”, proceder como na figura 27.

Na equação 72 quando $t = T$ tem-se:

$$V_s(T) = K \left(1 - e^{-\frac{T}{T}} \right) = K(1 - e^{-1})$$

$$V_s(T) = K(1 - 0,37)$$

ou

$$V_s(T) = 0,63K$$

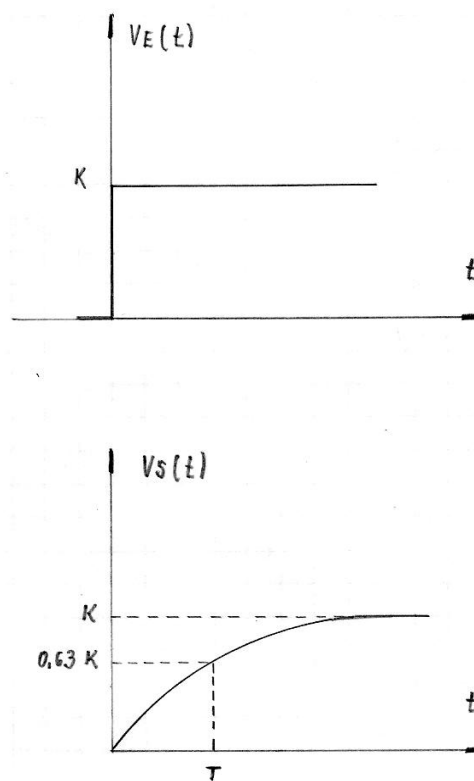


Figura 27 – Resposta do circuito RC ao degrau “K”

Assim, conhecendo-se o nível do sinal de tensão de entrada “ $V_E(t)$ ”, mede-se o sinal de tensão de saída “ $V_S(t)$ ”. A relação “ $\frac{V_S(t)}{V_E(t)}$ ”, após estabilização do sinal, fornece o ganho da FT. No gráfico da tensão de saída “ $V_S(t)$ ”, para um valor igual a 63% do valor final de estabilização, extrai-se a constante de tempo “ T ” do circuito.

5.11. Curvas de Bode

Chamam-se curvas de Bode aos gráficos representativos do ganho e da fase em função da variação da frequência complexa na FT de um sistema linear qualquer. Da equação 62-B, por exemplo, extrai-se a expressão do ganho dB.

$$GdB = -20 \log \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \quad (73)$$

Da equação 66, extrai-se, do mesmo modo, a expressão da fase em rad:

$$\theta = \arctan (-T\omega) \quad (74)$$

Utilizando o papel mono-logarítmico traçam-se as curvas de ganho e de fase em função da frequência complexa.

As figuras 28 mostram as curvas de Bode da FT da equação 56.

Notar que num circuito RC-Série do tipo mostrado na figura 24 caso a tensão de entrada, aplicada ao circuito, seja uma função que varie com a frequência e se esta atingir valores elevados praticamente não sairá sinal nenhum de tensão no capacitor. Na curva do ganho da figura 28A vê-se que nas altas frequências o ganho cai a valores inferiores a -20dB .

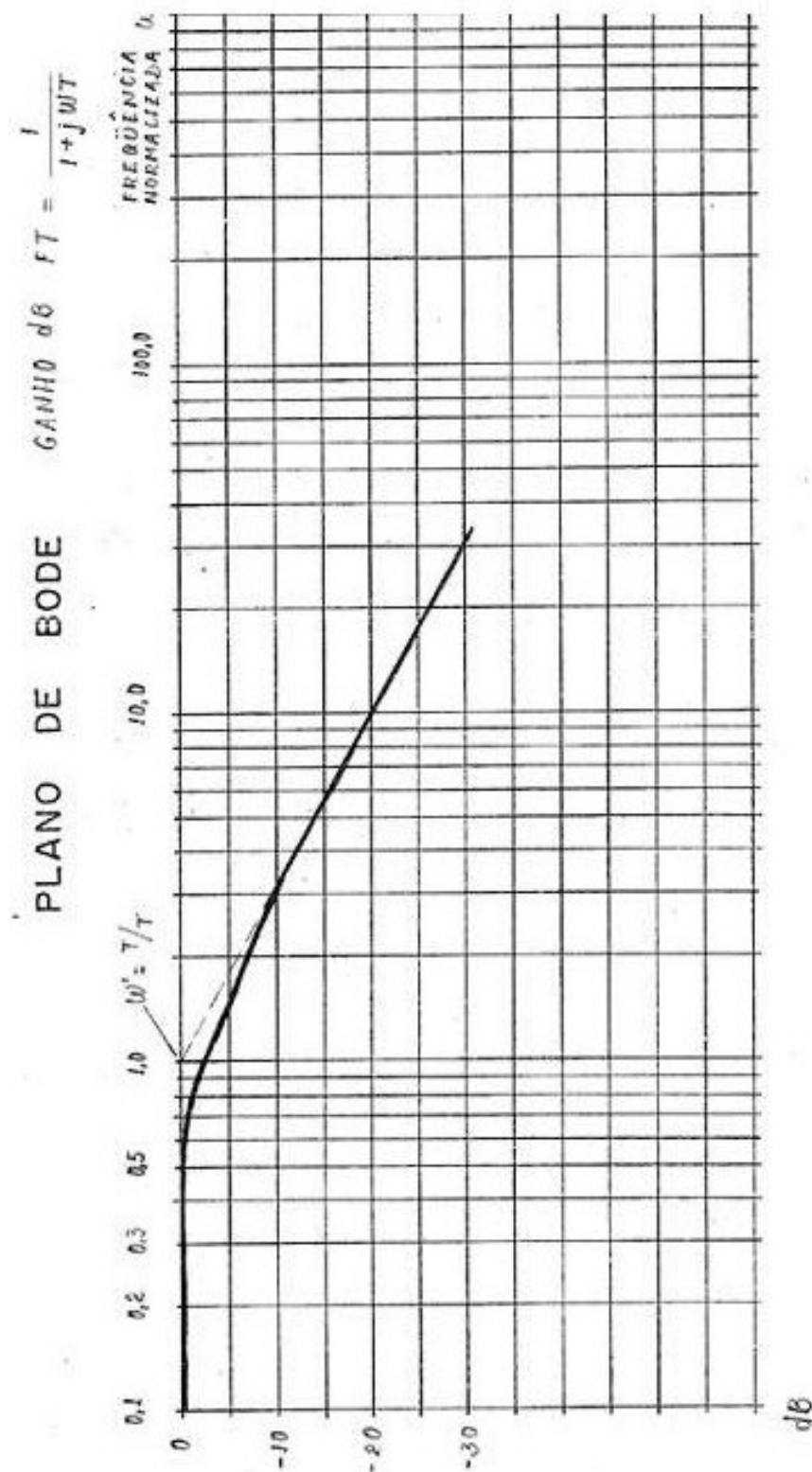


Figura 28A – Curva de ganho da FT da equação 56

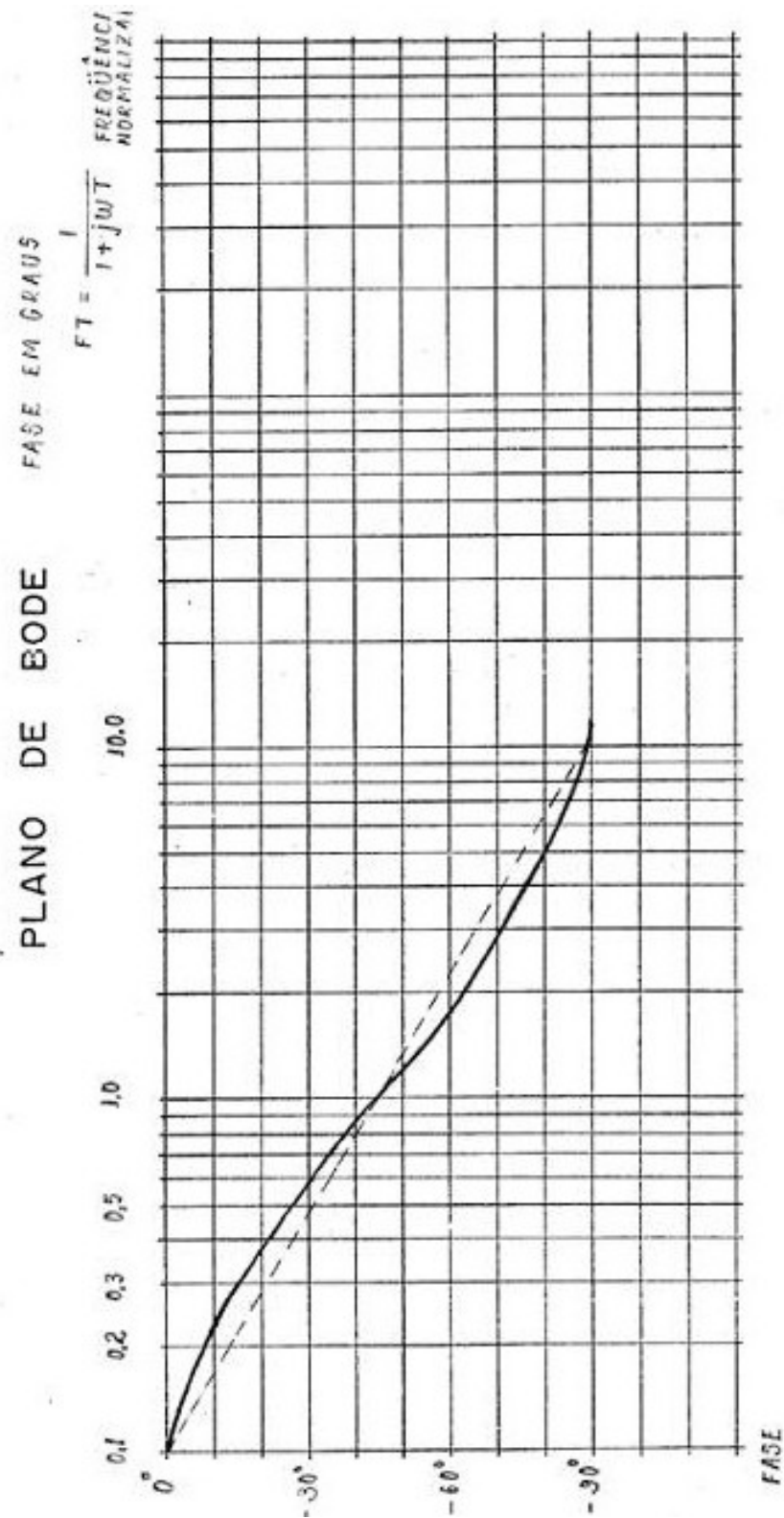


Figura 28B – Curva de fase da FT da equação 56

5.12. Sistemas Análogos

Muitas vezes acontece de dois ou mais sistemas, de natureza física diferente, terem equações diferenciais com aspectos bastante próximos. É o caso de um circuito elétrico RC-Série e um sistema mecânico amortecedor “dash-pot”. Um sistema é puramente elétrico enquanto o outro é puramente mecânico, porém a equação diferencial que rege a variação da tensão e da corrente no primeiro é idêntica àquela que rege a variação da força e da velocidade no segundo.

Seja a figura seguinte:

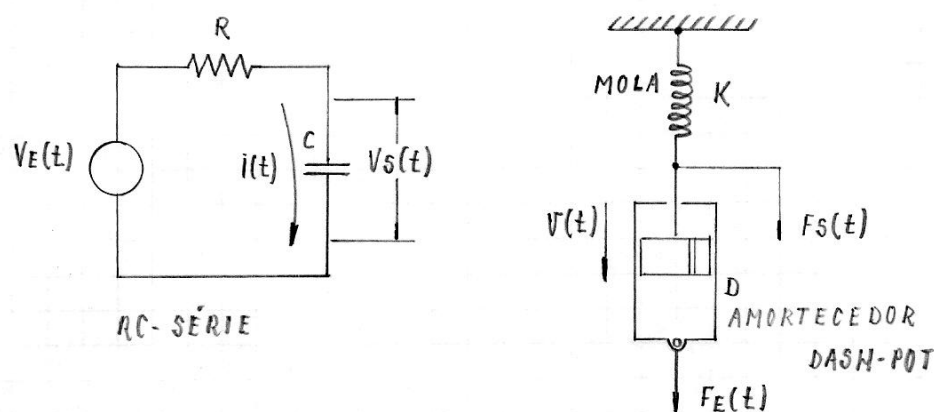


Figura 29 – Circuitos análogos

Para o exemplo exposto na figura 29 tem-se o caso da chamada analogia V-F ou tensão-força pelas características dos sistemas apresentados. Segue a tabela relativa ao processo de analogia entre os dois sistemas da figura prévia.

Circuito Elétrico RC-Série		Circuito Mecânico Dash-Pot	
$V_E(t)$	→	$F_E(t)$	Força
$V_S(t)$	→	$F_S(t)$	Força de mola
$i(t)$	→	$v(t)$	Velocidade
R	→	D	Atrito viscoso
C	→	K	Complância

Para o circuito elétrico tem-se a FT seguinte no domínio complexo:

$$\frac{V_S(S)}{V_E(S)} = \frac{1}{1+TS} \quad \text{com } T = RC \quad (75)$$

Para o circuito mecânico tem-se a FT seguinte no domínio complexo:

$$\frac{F_S(S)}{F_E(S)} = \frac{1}{1+TS} \quad \text{com } T = DK \quad (76)$$

5.13. Introdução à análise da estabilidade em sistemas de controle

Todo o estudo da teoria de controle tem uma só finalidade: projetar um sistema e estabilizá-lo operativamente.

Existem muitas técnicas e critérios verificativos da estabilidade bem como muitas definições. Nesta pequena e modesta parte se aterá à definição de estabilidade clássica que determina o seguinte.

“Um sistema é dito estável se, e somente se, a qualquer entrada de excitação sua resposta de saída tender para um valor final finito.”

Exemplos de respostas de sistemas:

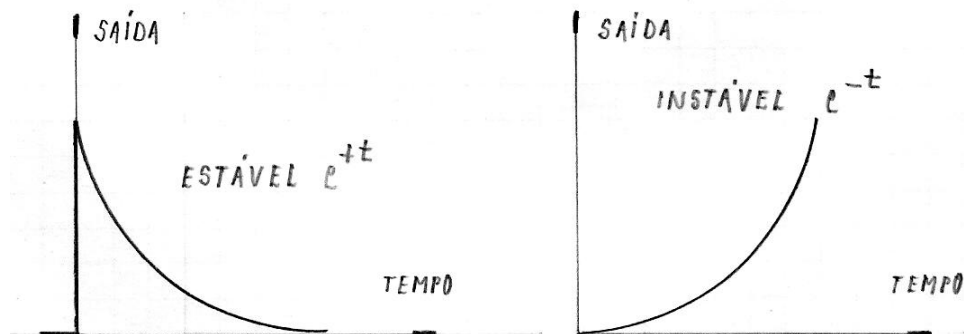


Figura 30 – Resposta estável e resposta instável

TABELA DE EXEMPLO DE SISTEMAS ANÁLOGOS

Grandeza Elétrica	Símbolo Usual	Unidade MKS	Grandeza Mecânica Translação	Símbolo Usual	Unidade MKS	Grandeza Mecânica Rotação	Símbolo Usual	Unidade MKS
Tensão	V	V	Força	f	N	Torque	τ	$N.m$
Corrente	I	A	Velocidade	V	$\frac{m}{s}$	Velocidade Angular	ω	$\frac{rad}{s}$
Resistência	R	Ω	Atrito Viscoso	D	$\frac{N}{s}$	Atrito Viscoso de Rotação	D_θ	$\frac{N.m.s}{rad}$
Capacitância	C	F	Complância de Mol	K	$\frac{m}{N}$	Complância Torcional	K_θ	$\frac{rad}{N.m}$
Indutância	L	H	Massa	m	Kg	Momento de Inércia	J	$\frac{N.m.s^2}{rad}$
Relação de Transformação Transformador	$\frac{V_{prim}}{V_{sec}}$	$\frac{V}{V}$	Relação Braço de Alavanca	$\frac{f_1}{f_2}$	$\frac{N}{N}$	Relação de Engrenagem	$\frac{\tau_1}{\tau_2}$	$\frac{N.m}{N.m}$

A análise da estabilidade pode ser resumida como na explanação seguinte.

Seja o sistema genérico abaixo caracterizado por um sistema com realimentação já no domínio da transformada.

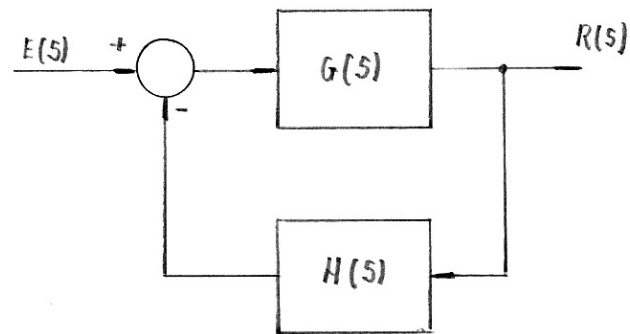


Figura 31 – Sistema genérico em malha fechada

A FT do sistema adotado é dada pela equação 8 seguinte:

$$FT = \frac{R(S)}{E(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S) \cdot H(S)} \quad (77)$$

Como se sabe a estabilidade ou não-estabilidade de qualquer sistema é medida por intermédio das raízes do polinômio denominador da FT deste sistema.

Considerando o polinômio da equação 78, de grau “n”, tem-se:

$$1 + G(S) \cdot H(S) = 0 \quad (78)$$

Logo, para o sistema regido pela FT da equação 77, a condição de instabilidade ocorrerá para raízes cujas partes reais sejam positivas, ou melhor:

$$RE\{Raiz_i[1 + G(S) \cdot H(S) = 0]\}_i = 1, 2, 3, \dots, n < 0 \quad (79)$$

Tem-se, assim, uma equação que, para sistemas lineares, caracteriza uma função polinomial no operador complexo “S” que, se resolvida, fornece as raízes do polinômio $1 + G(S) \cdot H(S)$ responsáveis pela característica de instabilidade do sistema.

Deste modo, atuando em parâmetros da FT [em $G(S)$ ou $H(S)$ ou ambas] consegue-se melhorar a estabilidade do sistema nas condições operativas requeridas.

Este critério de análise é universalmente conhecido como critério de Nyquist.

Caso $G(S) = K \frac{N(S)}{D(S)}$

e $H(S) = 1$ tem-se:

$$1 + G(S) \cdot H(S) \equiv 1 + K \frac{N(S)}{D(S)} \quad (80)$$

Para o caso da análise da estabilidade resolve-se a equação determinando as raízes da equação seguinte:

$$1 + G(S) \cdot H(S) = 0$$

e

$$1 + K \frac{N(S)}{D(S)} = 0 \quad (81)$$

Notar que o diagrama de blocos para o sistema em análise será:

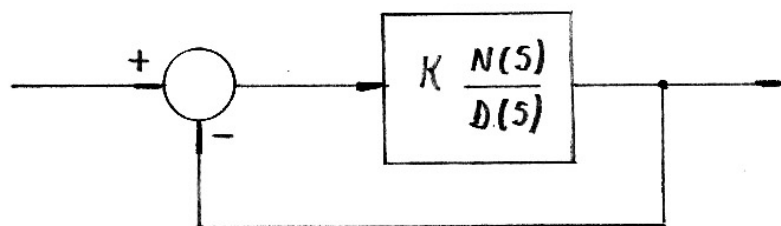


Figura 32 – Sistema com realimentação unitária

Na figura 32 tem-se:

K – ganho de canal direto;
 N(S) – polinômio numerador em “S”;
 D(S) – polinômio denominador em “S”.

A FT do sistema realimentado da figura 32 será:

$$FT = \frac{K \frac{N(S)}{D(S)}}{1 + K \frac{N(S)}{D(S)}} = \frac{K \cdot N(S)}{D(S) + K \cdot N(S)}$$

ou

$$FT = \frac{K \cdot N(S)}{D(S) + K \cdot N(S)} \quad (82)$$

A condição de estabilidade estará associada às raízes do denominador da FT da equação 82, ou seja:

$$P(S) \equiv D(S) + K \cdot N(S) = 0 \quad (83)$$

Notar que para cada valor de “K” o polinômio “P(S)”, da equação 83, admitirá diferentes raízes que caracterizam as constantes de tempo do sistema. Como estas constantes aparecem na resposta, no domínio do tempo, como fatores do tipo $e^{(RAIZ) \times (TEMPO)}$ a exponencial poderá ser crescente (instável) ou decrescente (estável).

Deste modo, variando-se o ganho “K”, diferentes raízes e diferentes comportamentos na resposta serão observados.

Este processo é conhecido como análise da estabilidade de sistemas via lugar geométrico das raízes, pois para cada valor de “K” diferentes raízes serão obtidas.

Embora existam outros métodos de avaliação do comportamento operativo de sistemas de controle, o método prático da inspeção pura, pela observação da resposta ao degrau, ainda é o mais utilizado pela sua simplicidade e objetividade. O grande problema no uso de métodos muito sofisticados é que na maioria das vezes esses métodos requerem uma modelagem bem precisa e isto depende de um trabalho bem apurado nos levantamentos de campo quando não da presença de profissionais dotados de certa qualificação muitas vezes incompatível com o nível técnico exigido.

REFERÊNCIAS

1. **J.J. D'AZZO – C.H. HOUPIS**
Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares
Editora Guanabara Dois – RJ – 1978
2. **J.C. GOULART SIQUEIRA – C.A.D. COELHO**
Notas de Aulas do Curso “Fundamentos de Controle” – Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica
Escola Federal de Engenharia de Itajubá – 1983
3. **C.A.D. COELHO**
Apostila do Curso “Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares”
FUPAI – Itajubá – 1985
4. **J.C. GOULART SIQUEIRA**
Apostila do DEL 106 – Circuitos Elétricos II
Tradução dos Capítulos 1 e 2 do Livro " The Analysis of Linear Circuits" de Charles M. Close, Editora Livros Técnicos e Científicos SA, RJ, 1975

LUIZ RENATO GOMES
Manuscrito em 1990.
Uberlândia-MG